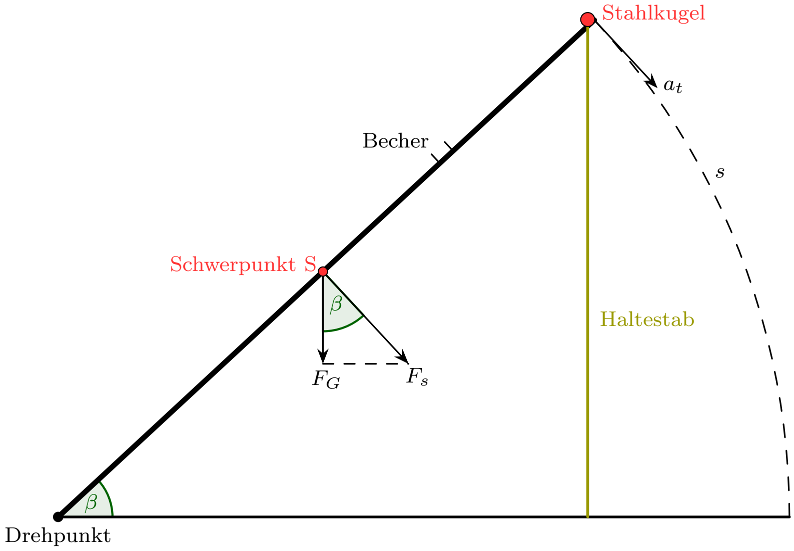
Schneller als im freien Fall

Am Ende eines Brettes ist ein Loch, in dem eine Stahlkugel liegt. Auf dem Brett ist ein kleiner Becher befestigt. Wenn der Haltestab entfernt wird, könnte man annehmen, dass sich während des Falls Kugel und Brett behindern. Das Experiment zeigt aber, dass die Kugel genau in dem Becher landet. Ein zu Boden fallendes Brett, das auf einer Seite auf den Boden aufliegt, stellt keinen frei fallenden Körper dar, weil außer der Gewichtskraft, die auf den Schwerpunkt wirkt, auch noch andere Kräfte auf das Brett ausgeübt werden. Jeder Punkt des Brettes vollführt eine Rotation um den Drehpunkt. Daher gelten, insbesondere auch für das bewegte Ende des Bretts, nicht die Gesetze des freien Falls.



a) Nach welcher Zeit schlägt das Brett auf den Boden auf?

b) Nach welcher Zeit schlägt die Kugel auf den Boden auf?

c) Bei welchem Ausgangswinkel β kommen Kugel und Brett gleichzeitig an?

d) Bei welchen Ausgangswinkeln β ist die Zeitdifferenz beider aufschlagender Körper am größten bzw. am kleisten?

Lösung

a) Auf den Schwerpunkt S des Bretts wirkt die Gewichtskraft F_G. Die Komponente senkrecht zum Brett sei F_s mit $\quad cos\ \beta = \frac{F_G}{F_s} \quad F_s = \frac{F_G}{cos\ \beta}$ ...(1).
Es wird angenommen, dass es sich um ein sehr schmales homogenes Brett mit kleiner Dicke handelt. Der Schwerpunkt rotiert mit dem Radius von $r = \frac{\ell}{2}$, wobei ℓ die Länge des Brettes ist. Es muss ermittelt werden, wie groß die Beschleunigung des Schwerpunktes ist, um Rückschlüsse auf die Beschleunigung am Brettende ziehen zu können. Das Drehmoment M im Schwerpunkt kann mit der Gleichung $M = r \times F_G$ bestimmt werden.
Da $F_s \perp r$, gilt mit (1) $\quad M = F_s \cdot r, \quad M = \frac{F_G \cdot r}{cos\ \beta}$.
Das Drehmoment ist proportional zur Länge des Hebelarms, am Ende des Brettes wirkt das Drehmoment $\quad 2 \cdot M = \frac{F_G \cdot \ell}{cos\ \beta} \quad M = \frac{F_G \cdot \ell}{2 \cdot cos\ \beta}$ ...(2).
Nach dem Grundgesetz der Rotation ist $\quad M = J \cdot \alpha$ ...(3)
und die Winkelbeschleunigung α am Ende des Brettes $\quad \alpha = \frac{a_t}{\ell}$ ...(4).

Dabei sind J das Massenträgheitsmoment des umfallenden Stabes und a_t die Tangentialbeschleunigung am Ende des Stabes. Das Massenträgheitsmoment kann mit $J = \frac{1}{3} \cdot m \cdot \ell^2$ angenommen werden, analog dem Massenträgheitsmoment eines dünnen Stabes, der um eine Querachse durch ein Ende rotiert.

Der äußere Punkt des Brettes bewegt sich gleichmäßig beschleunigt auf einer Kreisbahn der Länge s. Der Winkel β wird in der Zeit t_B überstrichen. Diese Bewegung beschreiben

die Gleichungen $\quad s = \frac{a_t}{2} \cdot t_B^2$ ...(5) und $\quad s = \ell \cdot \beta$ ...(6).

(5)=(6) mit (4) $\quad \frac{\alpha \cdot \ell}{2} \cdot t_B^2 = \ell \cdot \beta, \quad t_B^2 = \frac{2 \cdot \beta}{\alpha}$ ...(7).

Weiterhin ist mit (2)=(3) $\quad \frac{F_G \cdot \ell}{2 \cdot cos\ \beta} = J \cdot \alpha, \quad \frac{F_G \cdot \ell}{2 \cdot cos\ \beta} = \frac{1}{3} \cdot m \cdot \ell^2 \cdot \alpha,$

$$\frac{m \cdot g}{2 \cdot cos\ \beta} = \frac{1}{3} \cdot m \cdot \ell \cdot \alpha, \quad \alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{g}{\ell \cdot cos\ \beta}, \quad ...(8),$$

(8) in (7) $\quad t_B^2 = \frac{2 \cdot \beta}{\frac{3}{2} \cdot \frac{g}{\ell \cdot cos\ \beta}}, \quad t_B^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\ell \cdot \beta \cdot cos\ \beta}{g},$

$$\underline{\underline{t_B = 2 \cdot \sqrt{\frac{\ell \cdot \beta \cdot cos\ \beta}{3 \cdot g}}}} \quad ...(9).$$

Nach einer Zeit von $t_B = 2 \cdot \sqrt{\frac{\ell \cdot \beta \cdot cos\ \beta}{3 \cdot g}}$ Sekunden schlägt das Brett auf dem Boden auf.

b) Die Fallzeit der Kugel ist $\quad t_K = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}, \quad \underline{\underline{t_K = \sqrt{\frac{2 \cdot sin\ \beta \cdot \ell}{g}}}}$ ...(10).

c) (9)=(10) $\quad t_B = t_K, \quad 2 \cdot \sqrt{\frac{\ell \cdot \beta \cdot cos\ \beta}{3 \cdot g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot sin\ \beta \cdot \ell}{g}},$

quadriert und gekürzt $\quad 2 \cdot \frac{\beta \cdot cos\ \beta}{3} = sin\ \beta, \quad \beta = \frac{3}{2} \cdot tan\ \beta$ ...(11).

Die Gleichung (11) hat im Bereich von $0° \leq \beta \leq 90°$ keine Lösung. Das Brett schlägt unabhängig vom Auslenkwinkel β immer zuerst auf dem Boden auf. Die Stahlkugel fällt in den Becher.

d) Die Zeitdifferenz Δt beim Aufschlagen von Brett und Kugel

ist mit (9) und (10) $\quad \Delta t = t_K - t_B, \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot sin\ \beta \cdot \ell}{g}} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\ell \cdot \beta \cdot cos\ \beta}{3 \cdot g}},$

$$\Delta t(\beta) = \sqrt{\frac{2 \cdot \ell}{g}} \cdot \left(\sqrt{sin\ \beta} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\beta \cdot cos\ \beta} \right) \quad ...(12).$$

Mit der Ableitung von (12) kann die maximale/minimale Zeitdifferenz bestimmt werden.

notw. Bedingung $\Delta t'(\beta) = 0 \quad \Delta t'(\beta) = \sqrt{\frac{2 \cdot \ell}{g}} \cdot \left(\frac{cos\ \beta}{2 \cdot \sqrt{sin\ \beta}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{cos\ \beta - \beta \cdot sin\ \beta}{2 \cdot \sqrt{\beta \cdot cos\ \beta}} \right)$ ...(13).

Die Funktion (13) hat für $\beta > 0$ keine Nullstelle, d.h. je höher die Kugel gelegt werden kann und β größer wird, um so größer ist die Zeitdifferenz beim Aufschlagen von Brett und Kugel. (13) hat einen Tiefpunkt T an der Stelle $\beta = 0{,}31305$, was einem Winkel von $\beta = 17{,}94°$ entspricht. Bei diesem Winkel ist die Zeitdifferenzänderung am geringsten.