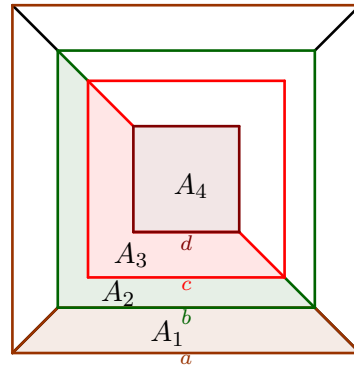


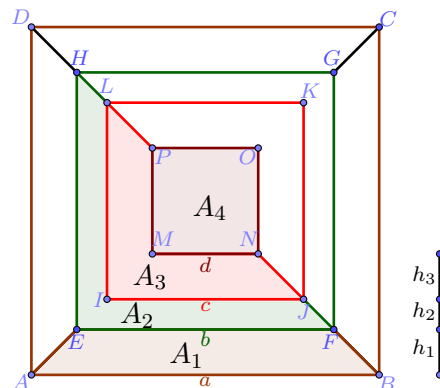
Konzentrische Quadrate

Vier konzentrisch angeordnete Quadrate haben ganzzahlige Seitenlängen a , b , c und d . Die Flächen A_1 , A_2 und A_3 besitzen den gleichen Inhalt. Die Seite a ist $a = 23 \text{ cm}$ lang. Wie lang ist die Seite d des Quadrates mit dem Flächeninhalt A_4 ?



Idee der Aufgabe nach „Die Aufgabe des Sultans“, Aufgabe No. 35 aus der Rätselsammlung „Euklids Wohnzimmer“ von Heinrich Hemme

Lösung



$$\begin{aligned} \text{Für das Trapez } \square ABFE \text{ ist } A_1 &= \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h_1, \\ \text{mit } h_1 &= \frac{1}{2} \cdot (a - b) & A_1 &= \frac{1}{4} \cdot (a^2 - b^2) & \dots(1). \\ \text{Für das Sechseck } EFJILH \text{ ist } A_2 &= (b + c) \cdot h_2, \\ \text{mit } h_2 &= \frac{1}{2} \cdot (b - c) & A_2 &= \frac{1}{2} \cdot (b^2 - c^2) & \dots(2). \\ \text{Es ist } (1) &= (2), \text{ so dass } & \frac{1}{4} \cdot (a^2 - b^2) &= \frac{1}{2} \cdot (b^2 - c^2), & a^2 = 3 \cdot b^2 - 2 \cdot c^2 & \dots(3). \\ \text{Für das Sechseck } IJNMPL \text{ ist } A_3 &= (c + d) \cdot h_3, \\ \text{mit } h_3 &= \frac{1}{2} \cdot (c - d) & A_3 &= \frac{1}{2} \cdot (c^2 - d^2) & \dots(4). \\ \text{Es ist } (2) &= (4), \text{ so dass } & \frac{1}{2} \cdot (b^2 - c^2) &= \frac{1}{2} \cdot (c^2 - d^2), & b^2 = 2 \cdot c^2 - d^2 & \dots(5). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (3) und (5) reichen den Programmen „Python“ und „Mathematica“, um die Lösungen $L = \{(b, c, d) \in \mathbb{N} | (17, 13, 7)\}$ zu finden. Die Seite d hat eine Länge von $d = 7 \text{ cm}$.

Der Python-Inhalt lautet:

```
a=23
for b in range(1,a-1):
    for c in range(1,b-1):
        for d in range(1,c-1):
            if a**2==3*b**2-2*c**2 and b**2==2*c**2-d**2:
                print(b,c,d)
```

Mathematica löst die Aufgabe mit nur einem Befehl

`FindInstance[{529 == 3b^2 - 2c^2 && b > 0 && c > 0, b^2 == 2c^2 - d^2 && c > 0 && d > 0}, {b, c, d}, Integers].`