kte Potenz gleich k aufeinanderfolgende natürliche Zahlen

Für welche positiven natürlichen Zahlen k kann die Summe von k aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die k-te Potenz einer natürlichen Zahl sein?

Aufgabe 2022-22 von Reiner Möwald aus dem Heft „Die $\sqrt{Wurzel}$“ vom Mai 2022

Lösung

Die aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind $a, a+1, a+2, a+3, ..., a+k-1$, wobei $a, k \in \mathbb{N}$, die Potenz sei n^k mit $n \in \mathbb{N}$.

Für $k = 2$ gilt: Bei allen ungeraden Basen n gibt es immer eine Lösung. Die ersten Möglichkeiten sind: $4 + 5 = 3^2$, $12 + 13 = 5^2$, $24 + 25 = 7^2$, $40 + 41 = 9^2$, ...

Für $k = 2$ ist	$a + (a + 1) = n^2$,	$2 \cdot a + 1 = n^2$,
für $k = 3$ ist	$a + (a + 1) + (a + 2) = n^3$,	$3 \cdot a + 3 = n^3$,
für $k = 4$ ist	$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) = n^4$,	$4 \cdot a + 6 = n^4$,
für $k = 5$ ist	$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) = n^5$,	$5 \cdot a + 10 = n^5$,
	$\vdots$	$\vdots$
allgemein	$a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)+...+(a+k-1) = n^k$,	$k \cdot a + \frac{(k-1)\cdot k}{2} = n^k$, $\frac{k}{2} \cdot (2 \cdot a + k - 1) = n^k$.

Ein kleines Python-Programm findet für $3 \leq k \leq 10$ acht Lösungen. Dabei werden k aufeinanderfolgende Zahlen bis zum größten Wert a von einer Million untersucht.

```
i=10
j=1000000
m=0
for a in range(1,j+1):
    for n in range(2,i+1):
        for k in range(3,i+1):
            if m<k and k*(2*a+k-1)==2*n**k:
                m+=1
                print(m,k,a,n)
```

Die acht Lösungen sind:

1 3 8 3,	d.h. die 1. Lösung ist:	$8 + 9 + 10 = 3^3$,	$27 = 27$ w.A.
2 3 71 6,	d.h. die 2. Lösung ist:	$71 + 72 + 73 = 6^3$,	$216 = 216$ w.A.
3 6 119 3,	d.h. die 3. Lösung ist:	$119 + 120 + 121 + 122 + 123 + 124 = 3^6$,	$729 = 729$ w.A.
4 5 623 5,	d.h. die 4. Lösung ist:	$623 + 624 + 625 + 626 + 627 = 5^5$,	$3125 = 3125$ w.A.
5 9 2183 3	d.h. die 5. Lösung ist:	$2183 + 2184 + 2185 + 2186 + 2187 + 2188 + 2189 + 2190 + 2191 = 3^9$,	$19683 = 19683$ w.A.
6 6 88571 9	d.h. die 6. Lösung ist:	$88571 + 88572 + 88573 + 88574 + 88575 + 88576 = 9^6$,	$531441 = 531441$ w.A.
7 7 117646 7	d.h. die 7. Lösung ist:	$117646+117647+117648+117649+117650 + 117651 + 117652 = 7^7$,	$823543 = 823543$ w.A.
8 10 976558 5	d.h. die 8. Lösung ist:	$976558+976559+976560+976561+976562+976563+976564+976565+976566 + 976567 = 5^{10}$,	$9765625 = 9765625$ w.A.

Ein Dankeschön geht an Ingmar Rubin, Berlin, für seine Anregungen zur Programmierung.