Wurzelaufgabe 2022-22
Für welche positiven natürlichen Zahlen k kann die Summe von k aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die k-te Potenz einer natürlichen Zahl sein?

Lösung
Die k aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien $a, a+1, a+2, \dots, a+(k-1)$ und n^k sei die k-te Potenz.

Wir suchen die obigen k natürlichen Zahlen, für die $\sum_{i=0}^{k-1}(a+i) = n^k$ sein kann.

$\sum_{i=0}^{k-1}(a+i) = a \cdot k + \frac{k \cdot (k-1)}{2}$. Wir betrachten also die Gleichung $a \cdot k + \frac{k \cdot (k-1)}{2} = n^k$

<=> $k \cdot (2 \cdot a + k - 1) = 2 \cdot n^k$ (1)

Behauptung: Für $k \equiv 0 \mod 4$ kann Gleichung (1) für kein a und kein n gelten, aber für $k \equiv 1$ oder 2 oder 3 mod 4 kann man a und n angeben, für welche (1) gilt.

Beweis:

1.) Sei $k = 4 \cdot l$. Wir setzen dies in (1) ein und erhalten $4 \cdot l \cdot (2 \cdot a + 4 \cdot l - 1) = 2 \cdot n^{(4 \cdot l)}$
=> $2 \cdot l \cdot (2 \cdot a + 4 \cdot l - 1) = n^{(4 \cdot l)}$ (2)

a) Sei n eine ungerade Zahl, dann auch $n^{(4 \cdot l)}$; die rechte Seite der Gleichung (2) wäre ungerade, aber die linke Seite gerade. Dies ist nicht möglich.

b) Sei nun n eine gerade Zahl, d.h. $n = 2 \cdot m$:
Gleichung (2) würde lauten $2 \cdot l \cdot (2 \cdot a + 4 \cdot l - 1) = 2^{(4 \cdot l)} \cdot m^{(4 \cdot l)}$ (3)
Wir können schreiben $l = 2^e \cdot q$ mit ggT(2,q) = 1 und $e \geqslant 0$.

Dies eingesetzt in Gleichung (3) ergibt $2^{(e+1)} \cdot q \cdot (2 \cdot a + 4 \cdot l - 1) = 2^{(4 \cdot l)} \cdot m^{(4 \cdot l)}$
=> $q \cdot (2 \cdot a + 4 \cdot l - 1) = 2^{(4 \cdot l) - (e+1)} \cdot m^{(4 \cdot l)}$ (4)

Nun ist der Exponent $4 \cdot l - (e+1) \geq 1$, denn $4 \cdot l = 2^{(e+2)} \cdot q \geq e+2$.
Es ist daher jetzt die rechte Seite von (4) gerade, aber die linke ungerade.
Dies ist wiederum nicht möglich.

2.) Sei $k = 4 \cdot l + 1$ mit $l \geq 0$. Wir wählen $n = k = 4 \cdot l + 1$, setzen in Gleichung (1) ein und erhalten $(4 \cdot l + 1) \cdot (2 \cdot a + 4 \cdot l) = 2 \cdot (4 \cdot l + 1)^{(4 \cdot l + 1)}$
=> $a = (4 \cdot l + 1)^{4 \cdot l} - 2 \cdot l$
Gleichung (1) ist also mit $n = k = 4 \cdot l + 1$ und $a = (4 \cdot l + 1)^{4 \cdot l} - 2 \cdot l$ erfüllt.
Beispiele dazu: l = 1 => k=5 , n=5 und $a = 5^4 - 2 = 623$
l=2 => k=9 , n=9 und $a = 9^8 - 4 = 43\,046\,717$

3.) Sei $k = 4 \cdot l + 2$ mit $l \geq 0$. Den Fall l = 0 behandeln wir gesondert:
Gleichung (1) lautet dann $2 \cdot (2 \cdot a + 1) = 2 \cdot n^2$ => $a = \frac{(n-1) \cdot (n+1)}{2}$.
Damit a ganzzahlig wird, muß man für n eine ungerade Zahl wählen.
Für n=1 wird a=0. Soll a positiv sein, muß man für n eine ungerade Zahl >=3 wählen. Wir wählen n=3 und erhalten a=4. Wir sehen $4 + 5 = 3^2$.
Für $k = 4 \cdot l + 2$ - mit $l \geq 1$ - können wir $n = \frac{k}{2} = 2 \cdot l + 1$ wählen.

Gleichung (1) lautet dann $(4 \cdot l+2) \cdot (2 \cdot a+4 \cdot l+1) = 2 \cdot (2 \cdot l+1)^{(4 \cdot l+2)}$

=> $a = \dfrac{(2 \cdot l+1)^{(4 \cdot l+1)} - (4 \cdot l+1)}{2}$

Beispiel: l = 1, d.h. k = 6. Es ist dann n=3 und $a = \dfrac{3^5 - 5}{2} = 119$

4.) Sei $k = 4 \cdot l + 3$ mit $l \geq 0$. Wir wählen $n = k = 4 \cdot l+3$, setzen in Gleichung (1) ein und erhalten $(4 \cdot l+3) \cdot (2 \cdot a + 4 \cdot l+2) = 2 \cdot (4 \cdot l+3)^{(4 \cdot l+3)}$

=> $a = (4 \cdot l+3)^{(4 \cdot l+2)} - (2 \cdot l+1)$

Zwei Beispiele dazu: a) l=0 => k=n=3 und $a=3^2-1=8$, 8+9+10 = 27 = 3^3
b) l=1 => k=n=7 und $a=7^6-3=117646$