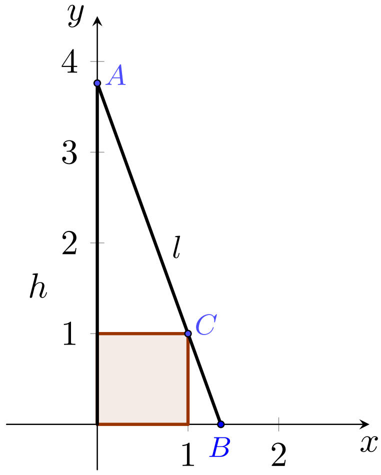
Leiter und Würfel

An einer Wand steht eine würfelförmige Holzkiste mit einer Kantenlänge von $1{,}0\ m$. An diese Wand soll vom Fußboden aus eine vier Meter lange Leiter angelehnt werden.
In welcher maximalen Höhe kann das obere Ende der Leiter die Wand berühren?



Idee der Aufgabe von https://www.logisch-gedacht.de/matheraetsel/leiter/

Lösung

Eine Gerade durch die Punkte A und B hat die Gleichung $y = m \cdot x + b$.
Mit $b = h$, $m = -\frac{h-1}{1}$, $m = 1 - h$ ist die Nullstelle bei $x_N = -\frac{b}{m}$ bzw. $x_N = \frac{h}{h-1}$ ...(1).
Nun gilt nach dem Satz von Pythagoras $h^2 + x_N^2 = l^2$ ...(2).

(1) in (2) liefert
$$h^2 + \left(\frac{h}{h-1}\right)^2 = \ell^2,$$
$$h^2 \cdot (h-1)^2 + h^2 = \ell^2 \cdot (h-1)^2,$$
$$h^2 \cdot (h^2 - 2 \cdot h + 1) + h^2 = \ell^2 \cdot \left(h^2 - 2 \cdot h + 1\right),$$
$$h^4 - 2 \cdot h^3 + h^2 + h^2 = \ell^2 \cdot h^2 - 2 \cdot \ell^2 \cdot h + \ell^2,$$
$$h^4 - 2 \cdot h^3 + 2 \cdot h^2 - \ell^2 \cdot h^2 + 2 \cdot \ell^2 \cdot h - \ell^2 = 0,$$
$$h^4 - 2 \cdot h^3 + \left(2 - \ell^2\right) \cdot h^2 + 2 \cdot \ell^2 \cdot h - \ell^2 = 0.$$

Die Funktion $f(h) = h^4 - 2 \cdot h^3 + \left(2 - \ell^2\right) \cdot h^2 + 2 \cdot \ell^2 \cdot h - \ell^2$
hat die einzige sinnvolle Nullstelle bei $h = 3{,}761$.
Die vier Meter lange Leiter kann bis in eine Höhe von $h = 3{,}76\ m$ an die Wand gelehnt werden.