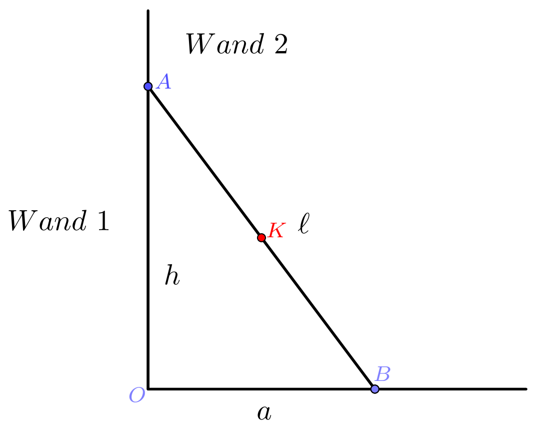
Rutschende Leiter

In der Ecke eines Raumes ist eine Leiter an die eine Wand 1 angelehnt. In der Mitte dieser Leiter (im Punkt K) ist ein Stück Kreide befestigt. Die Spitze der Kreide berührt die Wand 2. Rutscht die Leiter nun nach rechts weg, hinterlässt die Kreide eine Linie auf der Wand 2.

a) Mit welcher Funktionsgleichung kann die Kreidelinie beschrieben werden?

b) Wie groß ist der Drehwinkel der Kreide?



Idee der Aufgabe von https://www.logisch-gedacht.de/matheraetsel/fallende-leiter/

Lösung

a) Legt man ein kartesisches Koordinatensystem in den Punkt O, liegt die Leiter mit der Länge ℓ auf einer Geraden mit der Funktionsgleichung $y = m \cdot x + n$ ...(1).

Dabei lehnt die Leiter in einer Höhe $h = n$ gegen die Wand (Punkt $A\,(0 \mid h)$)

und ihre Entfernung von der Wand beträgt $a = -\frac{h}{m}$ (Punkt $B\left(-\frac{h}{m} \mid 0\right)$).

Aus (1) wird mit $m < 0$ $y = m \cdot x + h$ ...(2).

Weiterhin gilt der Satz von Pythagoras $\ell^2 = h^2 + a^2$, ...(3),

$a = -\frac{h}{m}$ in (3) $h = \sqrt{\frac{\ell^2}{1+\frac{1}{m^2}}}$ $h = \left|\frac{m \cdot \ell}{\sqrt{1+m^2}}\right|$ ...(4).

(1) wird zu $y = m \cdot x + \left|\frac{m \cdot \ell}{\sqrt{1+m^2}}\right|$ ...(5).

Der Beginn der Kreidelinie ist in der Mitte der Leiter im Punkt $K\,(x_K \mid y_K)$.

Die Koordinaten von K sind mit (4) $K\left(-\frac{h}{2 \cdot m} \mid \frac{h}{2}\right)$, $K\left(\frac{\ell}{2 \cdot \sqrt{1+m^2}} \mid \frac{m \cdot \ell}{2 \cdot \sqrt{1+m^2}}\right)$.

Die x-Werte der Kreidelinie ergeben sich aus $x_K = \frac{\ell}{2 \cdot \sqrt{1+m^2}}$, sie verändern sich mit dem Rutschen der Leiter.

x_K ist von der Steigung m abhängig, sie beträgt $m = -\sqrt{\frac{\ell^2}{4 \cdot x_K^2} - 1}$.

m in (5) liefert $y = -\sqrt{\frac{\ell^2}{4 \cdot x_K^2} - 1} \cdot x + \frac{\ell \cdot \sqrt{\frac{\ell^2}{4 \cdot x_K^2} - 1}}{\sqrt{1 + \frac{\ell^2}{4 \cdot x_K^2} - 1}}$,

zusammengefasst $y = -\sqrt{\frac{\ell^2}{4 \cdot x_K^2} - 1} \cdot x + 2 \cdot x_K \cdot \sqrt{\frac{\ell^2}{4 \cdot x_K^2} - 1}$,

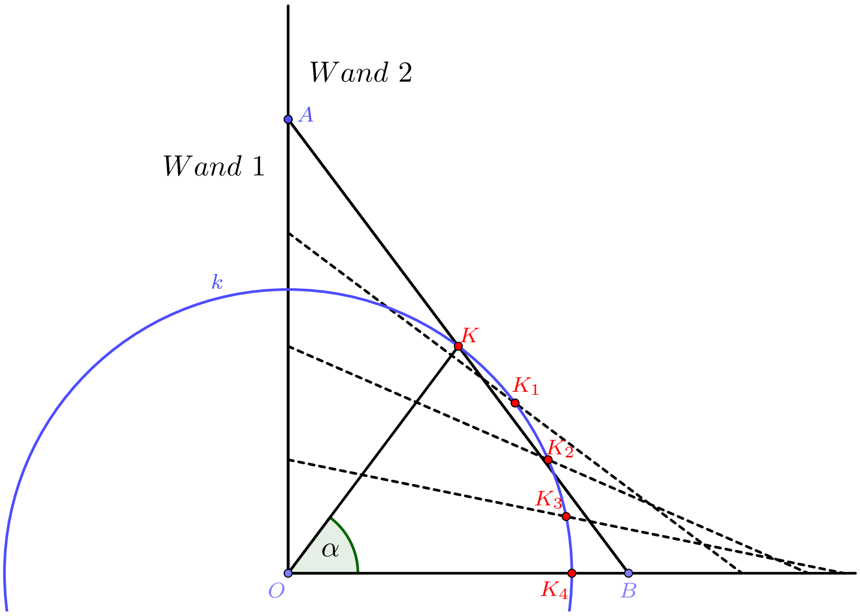
im Punkt $K\,(x_K \mid y_K)$ $y_K = -\frac{\sqrt{\ell^2 - 4 \cdot x_K}}{2 \cdot x_K} \cdot x_K + \sqrt{\ell^2 - 4 \cdot x_K^2}$,

zusammengefasst $y_K = \frac{\sqrt{\ell^2 - 4 \cdot x_K}}{2}$,

quadriert und umgestellt $4 \cdot y_K^2 + 4 \cdot x_K^2 = \ell^2$,

es entsteht $x_K^2 + y_K^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$.

Die Kreidelinie ist eine Kreisbahn mit dem Radius $r = \frac{\ell}{2}$.



b) Der von der Kreide überstrichene Winkel kann berechnet werden.

Im Dreieck ΔOBK ist $\quad cos\,(\alpha) = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\ell}{2}}$, $\quad \underline{\underline{\alpha = arccos\left(\frac{a}{\ell}\right)}}$.

Wird die Leiter direkt von der Wand weggezogen, überstreicht der Punkt K einen Viertelkreis, $\alpha = 90°$.