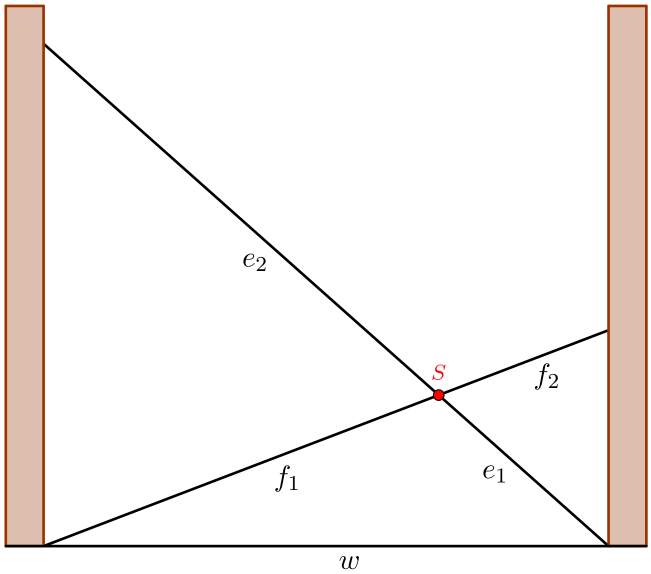
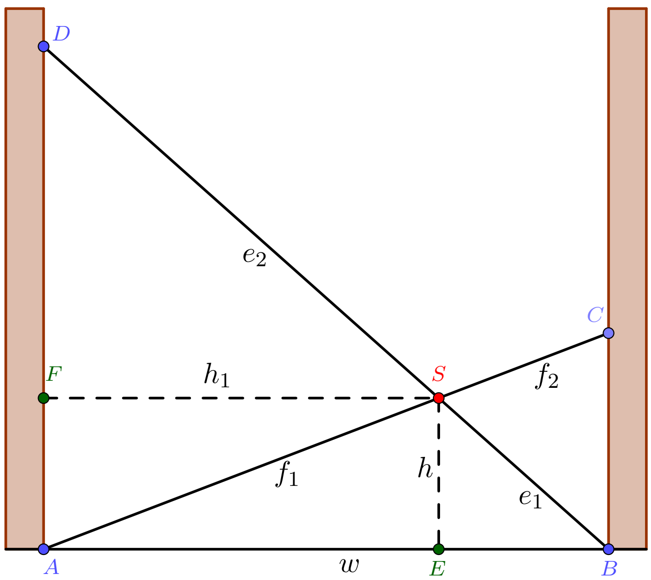
Zwei Leitern in einer Gasse

Zwei Leitern der Längen $e = 10\ m$ und $f = 8{,}0\ m$ liegen überkreuz zwischen den Wänden einer Gasse w. Der Kreuzungspunkt S befindet sich $h = 2{,}0\ m$ über dem Boden.
Wie breit ist die Gasse?



Aufgabe von Ingmar Rubin vom 25. Juni 2006

Lösung



$A_{\Delta ABD} = A_{\Delta ABS} + A_{\Delta ASD}$, $\quad \frac{1}{2} \cdot w \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot w \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot h_1$, $\quad a \cdot \overline{AD} = w \cdot h + \overline{AD} \cdot h_1 \quad ...(1).$

Wenn $\overline{AD} = b$ und $\overline{BC} = c$, gelten nach dem Satz von Pythagoras die Beziehungen

$$e^2 = w^2 + b^2 \quad ...(2), \qquad f^2 = w^2 + c^2 \quad ...(3).$$

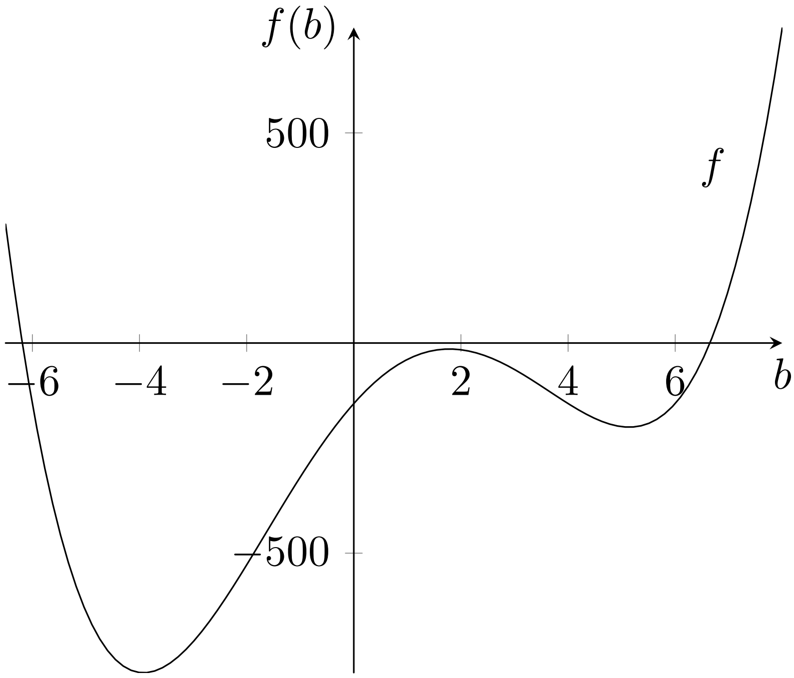
Der zweite Teil des Strahlensatzes liefert mit $x_S = h_1$ $\quad \frac{h_1}{h} = \frac{w}{c}$, $\quad h_1 = \frac{w}{c} \cdot h \quad ...(4),$

(4) in (1) $\quad w \cdot b = w \cdot h + b \cdot \frac{w}{c} \cdot h_1$, $\quad c = \frac{b \cdot h}{b - h}$, $\quad ...(5).$

(5) in (3) und (2)-(3) liefert

$$e^2 - f^2 = b^2 - \left(\frac{b \cdot h}{b-h}\right)^2,$$
$$(b-h)^2 \cdot \left(e^2 - f^2\right) = b^2 \cdot (b-h)^2 - b^2 \cdot h^2,$$
$$(b-h)^2 \cdot \left(e^2 - f^2\right) = b^2 \cdot \left(b^2 - 2 \cdot b \cdot h + h^2 - h^2\right),$$
$$0 = b^4 - 2 \cdot h \cdot b^3 - (b-h)^2 \cdot \left(e^2 - f^2\right),$$
$$0 = b^4 - 2 \cdot 2 \cdot b^3 - (b-2)^2 \cdot (100 - 64),$$
$$0 = b^4 - 4 \cdot b^3 - 36 \cdot (b-2)^2.$$

Die Funktion $f(b) = b^4 - 4 \cdot b^3 - 36 \cdot (b-2)^2$ hat die positive Nullstelle bei $\underline{\underline{b = 6{,}647}}$.



Dann ist $w^2 = e^2 - b^2$, $w^2 = 10^2 - 6{,}647^2$, $\underline{\underline{w = 7{,}471\ LE}}$.

Die Gasse ist 7,47 m breit.