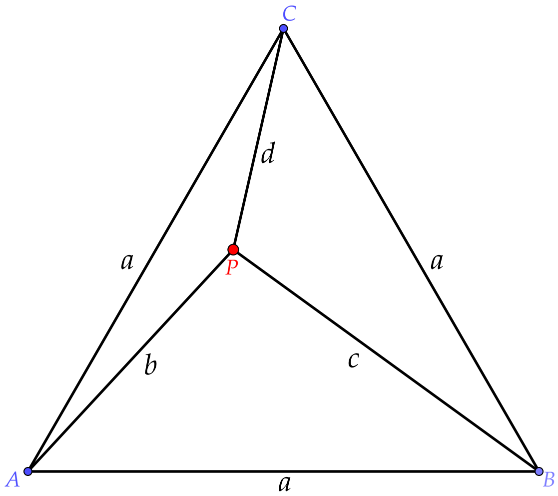
Linien im gleichseitigen Dreieck

Ein Dreieck ΔABC sei gleichseitig mit der Seitenlänge a. Drei unterschiedlich lange Linien $b = 4\ cm$, $c = 5\ cm$ und $d = 3\ cm$ verlaufen innerhalb des Dreiecks und treffen sich vom Eckpunkt ausgehend im Punkt P.

a) Wie lang ist eine Dreiecksseite a?

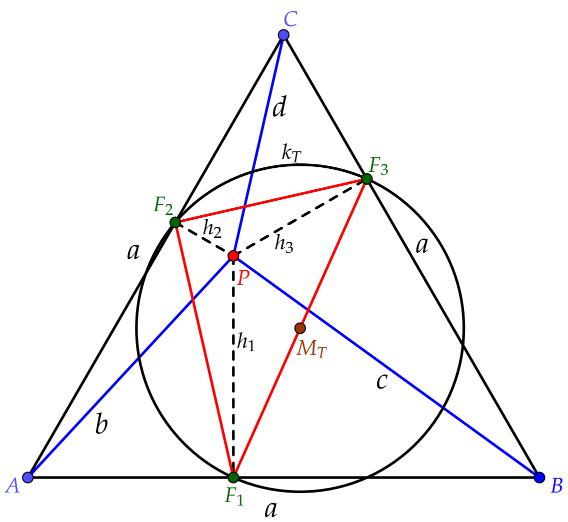
b) Welche Koordinaten hat der Punkt P, wenn der Punkt A im Koordinatenursprung liegt?



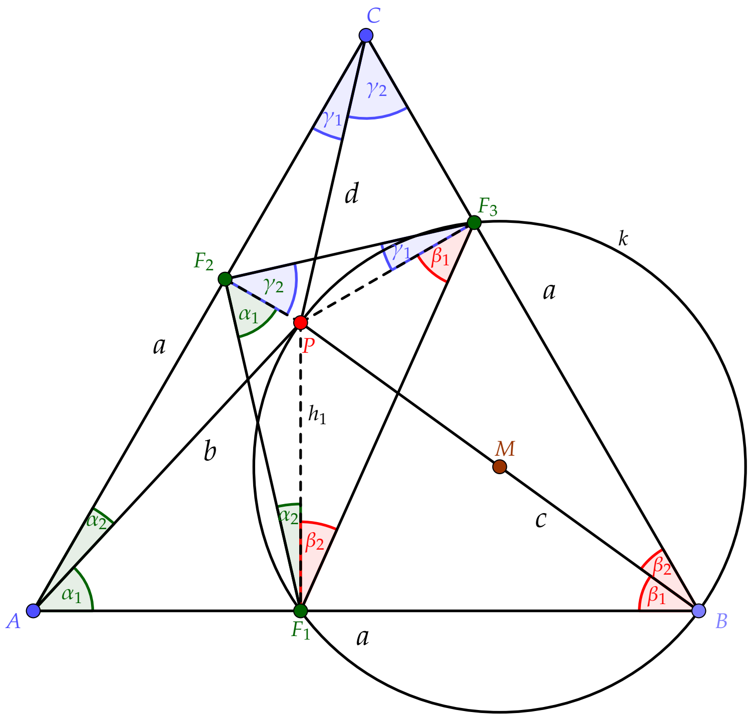
Idee nach einer Aufgabe von http://www.matheraetsel.de/archiv/Geometrie/Dreieck1/DREIECK1.PDF

Lösung

a) Man zeichnet von P aus die Höhen der Dreiecke ΔABP, ΔBCP und ΔCAP auf die Seiten a und erhält die Höhenfußpunkte F_1, F_2 und F_3. Der Mittelpunkt der Seite $\overline{F_1F_3}$ ist der Mittelpunkt des Thaleskreises k_T. Das Dreieck $\Delta F_1F_3F_2$ ist rechtwinklig.



Der Winkel $\sphericalangle F_1PF_2$ ist 120° groß, da im Viereck $\square AF_1PF_2$ gilt: $\sphericalangle F_1PF_2 = 360° - 60° - 2 \cdot 90°$, $\sphericalangle F_1PF_2 = 120°$. Gleiches gilt für die Winkel $\sphericalangle F_2PF_3$ und $\sphericalangle F_3PF_1$, die auch eine Größe von 120° haben. Nun werden weitere Winkel betrachtet.



Im Dreieck ΔF_3PF_1 müssen die beiden Winkel β_1 und β_2 zusammen $60°$ groß sein. Die Winkel β_1 bei F_3 und B sind Peripheriewinkel über der Sehne h_1 eines Kreises k mit dem Radius von $r = \frac{c}{2}$ und dem Mittelpunkt M. Sie sind damit gleich groß. Wenn im Dreieck $\Delta F_1F_2F_3$ die Winkel $\beta_1 + \beta_2 = 60°$ und der Winkel $\sphericalangle F_3F_2F_1 = 90°$, dann ist $\gamma_1 + \alpha_2 = 30°$ und im Dreieck ΔAPC der Winkel $\sphericalangle APC = 150°$.

Die Dreiecksseite a kann mit Hilfe des Kosinussatzes berechnet werden. Sie hat eine Länge von $a^2 = b^2 + d^2 - 2 \cdot b \cdot d \cdot cos\,(150°)$, $\quad a^2 = b^2 + d^2 + 2 \cdot b \cdot d \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$,

$a^2 = 16\ cm^2 + 9\ cm^2 + 2 \cdot 4\ cm \cdot 3\ cm \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$, $\quad a^2 = 25\ cm^2 + 12\ cm^2 \cdot \sqrt{3}$, $\quad \underline{\underline{a = 6{,}7664\ cm}}$.

Die Dreiecksseite ist $a = 6{,}77\ cm$ lang.

b) Im Dreieck ΔAPC gilt für den Flächeninhalt: $\frac{1}{2} \cdot b \cdot d \cdot sin\,(150°) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_2$,

$h_2 = \frac{b \cdot d \cdot sin(150°)}{a}$, $\quad h_2 = \frac{b \cdot d \cdot \frac{1}{2}}{a}$, $\quad h_2 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4\ cm \cdot 3\ cm}{6{,}7664\ cm}$, $\quad h_2 = 0{,}8867\ cm$.

Im Dreieck ΔAPF_2 kann der Winkel $\sphericalangle F_2AP = \alpha_2$ bestimmt werden:

$sin\,(\alpha_2) = \frac{h_2}{b}$, $\quad sin\,(\alpha_2) = \frac{0{,}8867\ cm}{4\ cm}$, $\quad \alpha_2 = 12{,}81°$.

Der Winkel α_1 hat dann eine Größe von $\quad \alpha_1 = 60° - 12{,}81°$, $\quad \alpha_1 = 47{,}19°$.

Mit Hilfe des Sinussatzes kann die Höhe h_1 im Dreieck ΔF_1PF_2 bestimmt werden:

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{sin(\alpha_1)}{sin(\alpha_2)}$, $\quad h_1 = \frac{sin(47{,}19°)}{sin(12{,}81°)} \cdot 0{,}8876\ cm$, $\quad h_1 = 2{,}9345\ cm$.

Die Strecke $\overline{AF_1}$ kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden:

$\overline{AF_1}^2 = b^2 - h_1^2$, $\quad \overline{AF_1}^2 = (4\ cm)^2 - (2{,}9345\ cm)^2$, $\quad \overline{AF_1}^2 = 16\ cm^2 - 8{,}6116\ cm^2$,

$\overline{AF_1}^2 = 7{,}3884\ cm^2$, $\quad \overline{AF} = 2{,}7182\ cm$, $\quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P\,(2{,}7182 \mid 2{,}9345)}}$.

Der Punkt P hat die Koordinaten $P\,(2{,}7182 \mid 2{,}9345)$.