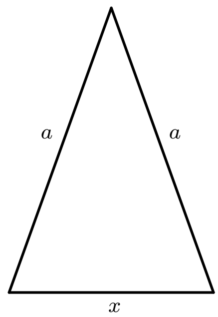
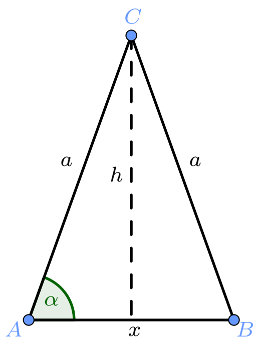
Maximale Fläche eines gleichschenkligen Dreiecks

Wie groß muss man die dritte Seite x eines gleichschenkligen Dreiecks mit vorgegebener Schenkellänge a wählen, damit die Fläche maximal wird? Bitte keine Differentialrechnung!



Aufgabe aus dem Kalenderblatt des 15. April 2021 von Heinrich Hemme

Lösung

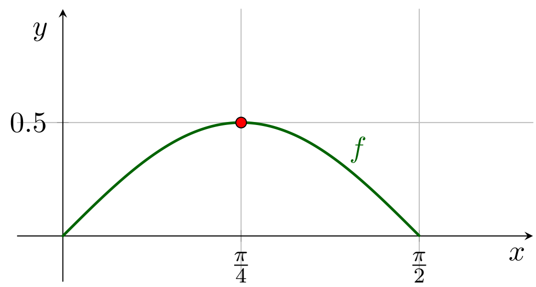


Der Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks ΔABC kann mit der Gleichung $A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h$ bestimmt werden.

Dabei ist $\quad h = a \cdot sin\ \alpha \quad$ und $\quad x = 2 \cdot a \cdot cos\ \alpha$,

x, h in A $\quad A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a \cdot cos\ \alpha \cdot a \cdot sin\ \alpha$, $\quad A = a^2 \cdot cos\ \alpha \cdot sin\ \alpha$.

Die Funktion $f(x) = cos\ x \cdot sin\ x$ wird bei einem Winkel von $\frac{\pi}{4}$ maximal.



Dann ist $\quad x = 2 \cdot a \cdot cos\ 45°$, $\quad x = 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$,

$\underline{\underline{x = a \cdot \sqrt{2}}}$.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, das gleichschenklige Dreieck entlang der Höhe h zu halbieren und zu einem Rechteck wieder zusammenzulegen. Ist $h = \frac{x}{2}$ erhält man ein Quadrat. Das Quadrat hat bei Variationen von h und x den größten Flächeninhalt.

Da $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$ $\quad \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x}{2}$, $\quad a^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$,

$\frac{x^2}{2} = a^2$, $\quad \underline{\underline{x = a \cdot \sqrt{2}}}$.

Bei einer Basislänge von $x = a \cdot \sqrt{2}$ wird der Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks maximal.