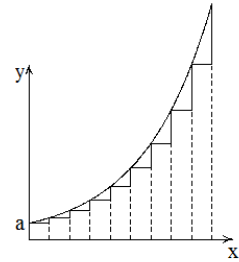


Wachstumsarten

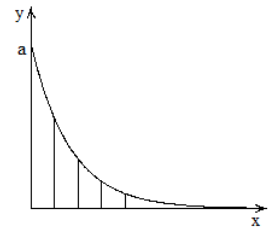
1. Exponentielles Wachstum

Exponentielles Wachstum wird durch die Funktion $f(x) = a \cdot e^{kx}$, $k > 0$, erfasst. Für die Wachstumsgeschwindigkeit f' gilt: $f'(x) = k \cdot a \cdot e^{kx}$, $f'(x) = k \cdot f(x)$, d.h. sie ist proportional zum Bestand. Es besteht zwischen der prozentualen Zunahme (pro Zeiteinheit) p und der Wachstumskonstanten k die Beziehung: $e^k = 1 + \frac{p}{100}$, so ist z.B. bei einer prozentualen Zunahme von 10% $e^k = 1,1$, $k = \ln 1,1$, $k = 0,0953$.



2. Exponentielle Abnahme

Exponentielle Abnahme wird durch die Funktion $f(x) = a \cdot e^{-kx}$, $k > 0$, erfasst. Für die Wachstumsgeschwindigkeit f' gilt: $f'(x) = -k \cdot a \cdot e^{-kx}$, $f'(x) = -k \cdot f(x)$, d.h. sie ist proportional zum Bestand. Es besteht zwischen der prozentualen Abnahme (pro Zeiteinheit) p und der Wachstumskonstanten k die Beziehung: $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$, $k = -\ln(1 - \frac{p}{100})$, so ist z.B. bei einer prozentualen Abnahme von 10% $e^{-k} = 0,9$, $k = -\ln 0,9$, $k = 0,1054$.

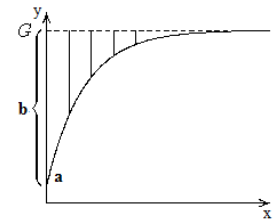


3. Begrenztes Wachstum

Begrenztes Wachstum wird durch die Funktion $f(x) = G - b \cdot e^{-kx}$... (1), $b = G - a$, $k > 0$, erfasst. Darin ist k eine positive Konstante, die festlegt, wie schnell $f(x)$ gegen G strebt.

Für den Anfangsbestand gilt: $f(0) = a = G - b$.

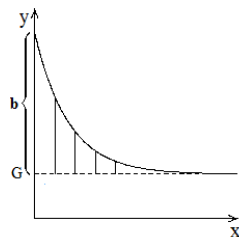
Für die Wachstumsgeschwindigkeit f' gilt: $f'(x) = -b \cdot e^{-kx} \cdot (-k)$, $f'(x) = b \cdot e^{-kx} \cdot k$, $f'(x) = k \cdot (G - f(x)) > 0$... (2), d.h. sie ist proportional zur Differenz von Wachstumsgrenze und Bestand. An den Funktionstermen ist zu erkennen, dass der Graph des begrenzten Wachstums aus dem Graphen der exponentiellen Abnahme (für gleiches a/b und k) durch Spiegelung an der x -Achse und Verschiebung in y -Richtung hervorgeht. Daher nehmen die Längen der senkrechten Strecken jeweils mit den Faktor e^{-k} ab. Diese Abnahme ist eine Zunahme des Bestandes. Es besteht die Beziehung: $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$, $k = -\ln(1 - \frac{p}{100})$.



4. Begrenzte(r) Abnahme / Zerfall

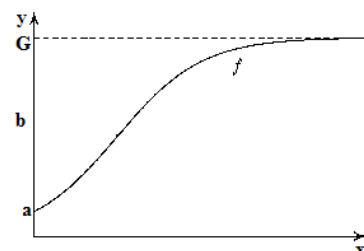
Begrenzte Abnahme wird durch die Funktion $f(x) = G + b \cdot e^{-kx}$, $k > 0$, erfasst. Darin ist k die Konstante, die festlegt, wie schnell $f(x)$ gegen G strebt. Für den Anfangsbestand gilt: $f(0) = G + b$.

Für die Wachstumsgeschwindigkeit f' gilt: $f'(x) = b \cdot e^{-kx} \cdot (-k)$, $f'(x) = (f(x) - G) \cdot (-k)$, $f'(x) = k \cdot (G - f(x)) < 0$, d.h. sie ist proportional zur Differenz von Wachstumsgrenze und Bestand. An den Funktionstermen ist zu erkennen, dass der Graph der begrenzten Abnahme aus dem Graphen der exponentiellen Abnahme (für gleiches a/b und k) und Verschiebung in y -Richtung hervorgeht. Daher nehmen die Längen der senkrechten Strecken jeweils mit den Faktor e^{-k} ab. Diese Abnahme ist eine Abnahme des Bestandes. Es besteht die Beziehung: $e^{-k} = 1 - \frac{p}{100}$, $k = -\ln(1 - \frac{p}{100})$.



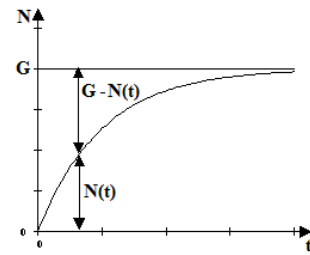
5. Logistisches Wachstum

Logistisches Wachstum kann durch exponentielles **und** begrenztes Wachstum durch die Funktion $f(x) = \frac{G \cdot a}{a + b \cdot e^{-kGx}}$, $f(x) = \frac{G}{1 + \frac{b}{a} \cdot e^{-kGx}}$, $b = G - a$, $k > 0$, beschrieben werden. Für den Anfangsbestand gilt: $f(0) = a$.

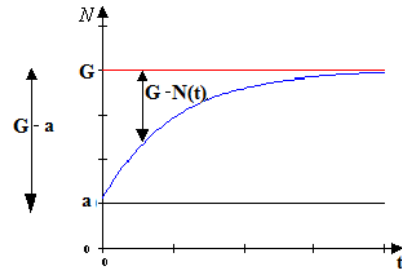


Begrenztes Wachstum

Bei der Einführung eines neuen Marktartikels nimmt der Anteil der Personen, die diesen Artikel besitzen, solange zu, bis eine Sättigung des Marktes erreicht ist. Die folgende Skizze soll diesen Verlauf veranschaulichen. Darin ist t die Zeit, $N(t)$ die Anzahl der verkauften Geräte, G der Sättigungswert, d.h. die maximale Anzahl des Artikels, die am Markt abgesetzt werden kann. $G - N(t)$ ist dann die Anzahl der potentiellen Kunden, die den Artikel noch nicht erworben haben. Da für das Wachstum



hier eine Grenze gegeben ist, heißt ein solcher Wachstumsvorgang begrenztes Wachstum. Um einen solchen Vorgang mathematisch zu modellieren, wird angenommen, dass das Sättigungsdefizit $G - N(t)$ exponentiell abnimmt, d.h. $G - N(t) = G \cdot e^{-kt}$. Dann lautet die Wachstumsfunktion des begrenzten Wachstums $N(t) = G(1 - e^{-kt})$, analog aus (1) $f(x) = G - b \cdot e^{-kx}$, $f(x) = G - (G - a) \cdot e^{-kx}$ mit $a = 0$, $f(x) = G - G \cdot e^{-kx}$, $f(x) = G(1 - e^{-kx})$.



Der Anfangswert $N(0) = a$ kann von Null verschieden sein. In diesem Fall folgt aus dem Ansatz $G - N(t) = (G - a) \cdot e^{-kt}$ die Wachstumsfunktion $N(t) = G - (G - a) \cdot e^{-kt}$, analog aus (1) $f(x) = G - (G - a) \cdot e^{-kx}$.

1. Eine Firma will in einer Stadt ein neues Küchengerät, das noch in keinem Haushalt vorhanden ist, einführen. Es wird zunächst in einem Stadtteil mit 2000 Haushalten ein Testverkauf begonnen. Nach einer Woche sind 363 Geräte verkauft.

a) Der Verkauf der Geräte soll als begrenztes Wachstum modelliert werden. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung und momentane Änderungsrate für dieses Modell. Da zu Beginn des Verkaufs in den Haushalten noch keine Geräte vorhanden sind, ist $a = 0$. Der Sättigungswert (Grenzwert) ist gleich der Anzahl der Haushalte: $G = 2000$. Für die Anzahl der abgesetzten Geräte wird die Funktion $N(t) = G(1 - e^{-kt})$ angenommen. Dabei ist t die Zeit in Wochen nach Verkaufsbeginn. Die Wachstumskonstante ergibt sich aus der Anzahl der nach $t = 1$ Woche verkauften Geräte: $N(1) = 2000(1 - e^{-k \cdot 1})$, $\frac{363}{2000} = 1 - e^{-k}$, $k = -\ln(1 - \frac{363}{2000})$, $k = 0,2$. Die Funktionsgleichung heißt $N(t) = 2000 \cdot (1 - e^{-0,2 \cdot t})$. Die Änderungsrate beträgt $N'(t) = 2000 \cdot 0,2 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$, $N'(t) = 400 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$, analog (2) $f'(x) = k \cdot (G - f(x))$, $f'(x) = 0,2 \cdot (2000 - 2000(1 - e^{-0,2 \cdot x}))$, $f'(x) = 0,2 \cdot 2000 e^{-0,2 \cdot x}$.

b) Nach welcher Zeit t_H haben nach diesem Modell die Hälfte aller Haushalte das Gerät gekauft? $1000 = 2000 \cdot (1 - e^{-0,2 \cdot t})$, $\frac{1}{2} = 1 - e^{-0,2 \cdot t}$, $\frac{1}{2} = e^{-0,2 \cdot t}$, $t = \frac{\ln 0,5}{-0,2}$, $t_H = 3,47$. Es dauert also etwa 3,5 Wochen, bis die Hälfte der Haushalte das Gerät erworben hat.

c) Wann sind voraussichtlich 1900 Geräte verkauft? $1900 = 2000 \cdot (1 - e^{-0,2 \cdot t})$, $\frac{19}{20} = 1 - e^{-0,2 \cdot t}$, $t = \frac{\ln 0,05}{-0,2}$, $t = 15$. Nach 15 Wochen sind 1900 Geräte verkauft worden.

2. Milch mit einer Temperatur von 6°C wird aus dem Kühlschrank genommen und in einen 25°C warmen Raum gestellt. In jedem Moment erwärmt sie sich pro Minute um 12% der noch herrschenden Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur. Ermitteln Sie eine Gleichung für die Erwärmungsgeschwindigkeit. Es liegt begrenztes Wachstum vor, die Gleichung ist $\vartheta(t) = 25 - (25 - 6) \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $e^{-k \cdot 1} = 1 - 0,12$, $k = -\ln 0,88$, $\vartheta(t) = 25 - 19 \cdot e^{\ln 0,88 \cdot t}$. Die Gleichung für die Erwärmungsgeschwindigkeit lautet $\vartheta'(t) = -19 \cdot e^{\ln 0,88 \cdot t} \cdot \ln 0,88$, $\vartheta'(t) = -\ln 0,88 \cdot 19 \cdot e^{\ln 0,88 \cdot t}$, analog (2) $f'(x) = k \cdot (25 - f(x))$, $f'(x) = \ln 0,88 \cdot (25 - f(x))$, $f'(x) = -\ln 0,88 \cdot 19 \cdot e^{-0,2 \cdot x}$.

Begrenztes Wachstum

3. Ein Kondensator der Kapazität $40\mu F$ wird über einen Widerstand $1 M\Omega$ an eine Spannungsquelle mit der Spannung $40 V$ angeschlossen. Die Spannung am Kondensator $U(t)$ wächst dann gemäß der folgenden Beziehung: $U(t) = 40(1 - e^{-0,025 \cdot t})$. Dabei wird die Spannung in Volt und die Zeit in Sekunden gemessen.

a) Nach welcher Zeit t_H ist die Spannung am Kondensator auf die Hälfte ihres Endwertes angestiegen? [27,73]

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von U zur Zeit $t = t_H$.

Aufgabe von G.Roofls $[U(t) = \frac{1}{2}t + 6, 14]$

4. Es werden 10 Fische in einem Teich ausgesetzt. Man nimmt an, dass sich die Fische jährlich um 25% vom Unterschied zwischen dem vorhandenen Bestand und der geschätzten Kapazität des Teiches (800 Fische) vermehren. Nach welcher Zeit sind 750 Fische vorhanden? [9,59]

Aufgabe von G.Roofls

5. Ein Patient erhält täglich am Morgen $m = 3 mg$ eines Medikaments. Die im Körper befindliche Medikamentenmenge wird im Laufe des Tages um 20 % abgebaut. Ermitteln Sie eine Funktion, die die Anreicherung des Medikaments im Körper erfasst. Welche Medikamentenmenge hat sich nach 12 Tagen angereichert? Überlegen Sie, dass die Anreicherung durch ein Gleichgewicht von Abbau und Neuaufnahme begrenzt ist. [14,2]

Aufgabe von G.Roofls

6. Ein Wachstumsprozess wird durch die Funktion $f(x) = 4 - 3 \cdot e^{-0,02x}$, x in min, beschrieben.

a) Berechnen Sie den Anfangsbestand und den Bestand nach 2 Stunden. [3,73]

a) Wie lange dauert es, bis 90 % des Endbestandes erreicht sind? [100,75]

c) Zu welcher Zeit beträgt der Zuwachs in der nächsten Minute 1%? Gesucht sind 2

Lösungswege, einer mit der Ableitung. [40,21]

Aufgabe von G.Roofls

7. Im Mittel ergeben sich beim monatlichen Wachstum von Forellen folgende Werte:

a) Ermitteln Sie a und k der Funktion $f(x) = a - a \cdot e^{-kx}$, die das Wachstum der Fische beschreibt. [23,23;0,1645]

Lebenszeit	4	8
Länge (in cm)	11,2	17

b) Wie groß sind die Fische im Mittel nach einem Jahr? [20]

c) Welche durchschnittliche Länge hat eine ausgewachsene Forelle? [23,23]

Aufgabe von G.Roofls

8. Ein Behälter hat ein Fassungsvermögen von 1200 Liter. Die enthaltene Flüssigkeitsmenge zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion f mit $f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{-0,01 \cdot t}$, $t \geq 0$, t in Minuten, $f(t)$ in Liter.

a) Zu welchem Zeitpunkt ist der Behälter zur Hälfte gefüllt? Zeigen Sie, dass die Flüssigkeitsmenge im Behälter stets zunimmt. Bestimmen Sie die mittlere Flüssigkeitsmenge während der ersten Stunde. Aus Sicherheitsgründen darf die Flüssigkeitsmenge höchstens 85% des Fassungsvermögens betragen. Wird diese Vorschrift zu jeder Zeit eingehalten? Begründen Sie Ihre Antwort. [69,3;398,4]

b) In einem anderen Behälter mit einem Zufluss und einem Abfluss befinden sich zu Beginn 200 Liter Flüssigkeit. Einerseits fliesen pro Minute 10 Liter zu, andererseits beträgt die momentane Abflussrate 1% des jeweiligen Inhalts pro Minute. Dieser Vorgang wird durch die Differenzialgleichung $B'(t) = a - b \cdot B(t)$ beschrieben. Geben Sie a und b an. Zeigen Sie, dass f eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist.

c) Der Vorgang in b) wird nun so geändert, dass pro Minute 12 Liter zufließen und die momentane Abflussrate 2% des Inhalts pro Minute beträgt. Die anfängliche Flüssigkeitsmenge ist wiederum 200 Liter. Ermitteln Sie einen Funktionsterm, der diesen Vorgang beschreibt. Welche Flüssigkeitsmenge ist nach einer Stunde aus diesem Behälter abgeflossen? [440,5]

Abiturprüfung Mathematik 2008 (Baden-Württemberg)

Begrenztes Wachstum

9. Eine Materialprobe wird in einem Labor erhitzt. Die Erwärmung wird durch die Funktion $\vartheta(t) = 70 - 50 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$, $t \geq 0$, beschrieben, t in Minuten, $\vartheta(t)$ in Grad Celsius.

- a) Skizzieren Sie die Graphen von ϑ und ϑ' .
- b) Zu welcher Zeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Probe erwärmt, am größten, und wie groß ist sie dann? [0;10]
- c) Berechnen Sie die Durchschnittstemperatur der ersten 10 Minuten. [48,4]
- d) Nach welcher Zeit hat sich die Probe auf die Hälfte seiner Endtemperatur erwärmt? [1,8]
- e) Nach welcher Zeit hat sich die anfängliche Erwärmungsgeschwindigkeit halbiert? [3,5]

Aufgabe von G.Roolfs

10. Die normale Körpertemperatur eines gesunden Menschen liegt bei $36,5^\circ\text{C}$. Die Funktion f mit $f(t) = 36,5 + t \cdot e^{-0,1 \cdot t}$ beschreibt modellhaft den Verlauf einer Fieberkurve bei einem Erkrankten. Dabei ist $t \geq 0$ die Zeit in Stunden nach Ausbruch der Krankheit und $f(t)$ die Körpertemperatur in $^\circ\text{C}$.

- a) Wann innerhalb der ersten 48 Stunden ist die Temperatur am höchsten? Geben Sie diese Temperatur an. Skizzieren Sie die Fieberkurve innerhalb der ersten 48 Stunden in einem geeigneten Ausschnitt eines Koordinatensystems. Zu welchen beiden Zeitpunkten innerhalb der ersten 48 Stunden nimmt die Körpertemperatur am stärksten zu bzw. ab?
- b) Wann sinkt die Körpertemperatur unter 37°C ? Weisen Sie nach, dass die Temperatur ab diesem Zeitpunkt dauerhaft unter 37°C bleibt. Bestimmen Sie die mittlere Körpertemperatur für den Zeitraum vom Krankheitsbeginn bis zu diesem Zeitpunkt. In welchem 2-Stunden-Zeitraum nimmt die Temperatur um ein Grad zu?
- c) Fünf Stunden nach Ausbruch der Krankheit erhält der Erkrankte ein Fieber senkendes Medikament. Von diesem Zeitpunkt an sinkt die Temperatur nach der Gesetzmäßigkeit des beschränkten Wachstums und nähert sich der normalen Körpertemperatur. Zwei Stunden nach Einnahme des Medikaments beträgt die Temperatur $38,4^\circ\text{C}$. Bestimmen Sie eine Funktion g , welche den weiteren Temperaturverlauf beschreibt. Zu welchem Zeitpunkt nach der Einnahme des Medikaments ist die Körpertemperatur erstmals um ein Grad niedriger, als sie ohne Medikament wäre?

Abiturprüfung Mathematik 2009 (Baden-Württemberg)

Begrenztes Wachstum

3. $U(t) = 40(1 - e^{-0,025 \cdot t})$, $20 = 40(1 - e^{-0,025 \cdot t})$, $\frac{1}{2} = e^{-0,025 \cdot t}$, $t_H = \frac{\ln 0,5}{-0,025}$, $t_H = 27,73$ min.

Nach rund 28 Minuten liegt am Kondensator eine Spannung von 20 V an.

Die Gleichung der Tangente heißt $U(t) = U'(t_H) \cdot t + n$. Der Anstieg entspricht $U'(t)$ mit $U'(t) = 40 \cdot 0,025 \cdot e^{-0,025 \cdot \frac{\ln 0,5}{-0,025}}$, $U'(t) = e^{\ln 0,5}$, $U'(t) = 0,5$. Da $U(t_H) = 20$ lautet die Gleichung der Tangente mit $20 = \frac{1}{2} \cdot 27,73 + n$, $n = 6,14$, $U(t) = \frac{1}{2} \cdot t + 6,14$.

4. $N(t) = G - (G - a) \cdot e^{-kt}$, $N(t) = 800 - 790 \cdot e^{\ln 0,75 \cdot t}$, $750 = 800 - 790 \cdot e^{\ln 0,75 \cdot t}$, $\frac{50}{790} = e^{\ln 0,75 \cdot t}$, $\frac{5}{79} = (e^{\ln 0,75})^t$, $\frac{5}{79} = 0,75^t$, $t = \frac{\ln \frac{5}{79}}{\ln 0,75}$, $t = 9,59$. Nach rund 9,6 Jahren sind 750 Fische im Teich vorhanden?

5. Die im Körper befindliche Medikamentenmenge strebt gegen den Grenzwert $m = 15$ mg.

$$m(t) = G - (G - a) \cdot e^{-kt}, \quad m(t) = 15 - (15 - 3) \cdot e^{\ln 0,8 \cdot t}$$

$$m(t) = 15 - 12 \cdot (e^{\ln 0,8})^t, \quad m(t) = 15 - 12 \cdot 0,8^t,$$

$$m(t) = 15 - 12 \cdot 0,8^{12}, \quad m(t) = 14,18.$$

Nach 12 Tagen hat sich im Körper eine Medikamentenmenge von 14,2 mg angereichert?

Tage	im Körper	80%
0	3	2,4
1	5,4	4,32
2	7,32	5,856
3	8,856	7,0848
4	10,0848	8,06784
5	11,06784	8,854272
6	11,854272	9,483418
7	12,483418	9,986734
8	12,986734	10,389387
9	13,389387	10,71151
10	13,71151	10,969208
11	13,969208	11,175366
12	14,175366	11,340293

6. a) $f(0) = 4 - 3 \cdot e^{-0,02 \cdot 0}$, $f(0) = 4 - 3$, $f(0) = 1$,
 $f(120) = 4 - 3 \cdot e^{-0,02 \cdot 120}$, $f(120) = 3,73$.

b) $3,6 = 4 - 3 \cdot e^{-0,02 \cdot x}$, $\frac{-0,4}{-3} = e^{-0,02 \cdot x}$, $x = \frac{\ln \frac{2}{15}}{-0,02}$, $x = 100,75$.
 Es dauert etwas über 100 Minuten bis 90 % des Endbestandes erreicht ist.

c) 1. Lösungsweg (exakt): $f(x+1) - f(x) = \frac{f(x)}{100}$, $4 - 3 \cdot e^{-0,02 \cdot (x+1)} - (4 - 3 \cdot e^{-0,02 \cdot x}) = \frac{4 - 3 \cdot e^{-0,02 \cdot x}}{100}$,
 $-3 \cdot e^{-0,02 \cdot x} \cdot e^{-0,02} + 3 \cdot e^{-0,02 \cdot x} = \frac{4 - 3 \cdot e^{-0,02 \cdot x}}{100}$, $e^{-0,02 \cdot x} \cdot (3 - 3 \cdot e^{-0,02}) = 0,04 - 0,03 \cdot e^{-0,02 \cdot x}$,
 $e^{-0,02 \cdot x} (3,03 - 3e^{-0,02}) = 0,04$, $x = \frac{1}{-0,02} \cdot \ln \frac{0,04}{3,03 - 3e^{-0,02}}$, $x = 40,21$. (Sekante an $f(x)$)

2. Lsungsweg (genhert): $f'(x) = \frac{f(x)}{100}$, $0,06 \cdot e^{-0,02 \cdot x} = \frac{1}{100} (4 - 3 \cdot e^{-0,02 \cdot x})$,
 $0,09 \cdot e^{-0,02 \cdot x} = 0,04$, $x = \frac{\ln \frac{4}{9}}{-0,02}$, $x = 40,55$. (Tangente an $f(x)$)

7.a) I $11,2 = a - a \cdot e^{-k \cdot 4}$, I $11,2 = a \cdot (1 - e^{-4k})$

II $17,0 = a - a \cdot e^{-k \cdot 8}$, II $17,0 = a \cdot (1 - e^{-8k})$

I : II : $\frac{11,2}{17} = \frac{1 - e^{-4k}}{1 - e^{-8k}}$,

$11,2 \cdot (1 - e^{-8k}) = 17 \cdot (1 - e^{-4k})$, $-5,8 = 11,2 \cdot e^{-8k} - 17 \cdot e^{-4k}$. Substitution: $e^{-4k} = z$,

$11,2 \cdot z^2 - 17z + 5,8 = 0$, $z^2 - \frac{17}{11,2}z + \frac{5,8}{11,2} = 0$, $z_{1,2} = \frac{8,5}{11,2} \pm \sqrt{\left(\frac{8,5}{11,2}\right)^2 - \frac{5,8}{11,2}}$,

$z_{1,2} = 0,759 \pm 0,241$, $z_1 = 0,518$, $z_2 = 1$. Rückführung: $0,518 = e^{-4k_1}$, $k_1 = \frac{\ln 0,518}{-4}$,

$k_1 = 0,1645$, $1 = e^{-4k_2}$, $k_2 = 0$, entfällt, da die Forelle wächst. Dann ist $a = \frac{17}{1 - e^{-8 \cdot 0,1645}}$,

$a = 23,23$ und somit die Funktionsgleichung $f(x) = 23,23 - 23,23 \cdot e^{-0,1645 \cdot x}$.

b) $f(t) = 23,23 - 23,23 \cdot e^{-0,1645 \cdot 12}$, $f(12) = 20$. Nach einem Jahr sind die Forellen 20 cm lang.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (23,23 - 23,23 \cdot e^{-0,1645 \cdot x})$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 23,23$.

Eine ausgewachsene Forelle ist rund 23 cm lang.

8. a) $f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{-0,01 \cdot t}$, $600 = 1000 - 800 \cdot e^{-0,01 \cdot t}$, $\frac{1}{2} = e^{-0,01 \cdot t}$, $t = -100 \cdot \ln \frac{1}{2}$, $t = 69,3$.
 Nach 69,3 Minuten ist der Behälter halb voll.

Monotonie: $f'(t) = 8 \cdot e^{-0,01 \cdot t}$, $f'(t) = \frac{8}{e^{0,01 \cdot t}} > 0 \rightarrow$ da $t \geq 0$, \rightarrow streng monoton steigend.

mittlere Flüssigkeitsmenge während der 1. Stunde: $V = \frac{1}{60} \cdot \int_0^{60} (1000 - 800 \cdot e^{-0,01 \cdot t}) \cdot dt$,

Begrenztes Wachstum

8. $V = \frac{1}{60} \cdot [1000t + 80000 \cdot e^{-0,01 \cdot t}]_0^{60}$, $V = \frac{1}{60} \cdot (80000 \cdot e^{-0,6} - 20000)$, $V = 398,4$.

Die mittlere Flüssigkeitsmenge in den ersten 60 Minuten beträgt rund 400 Liter.

Einhaltung der Vorschrift: 85% von 1200 l sind 1020 l. Da zu jedem Zeitpunkt das Volumen nicht größer sein kann als 1000 l, wird die Vorschrift immer eingehalten.

- b) Die Differenzialgleichung $B'(t) = a - b \cdot B(t)$ stellt die momentane Änderungsrate der Funktion $B(t)$ dar. Da der Faktor 1% ist, gilt $b = 0,01$, a hat den Wert 10, so dass $B'(t) = 10 - 0,01 \cdot B(t)$. Um zu zeigen, dass f die Funktion ist, wird eingesetzt: $(-0,01) \cdot (-800) \cdot e^{-0,01 \cdot t} = 10 - 0,01 \cdot (1000 - 800 \cdot e^{-0,01 \cdot t})$, $8 \cdot e^{-0,01 \cdot t} = 10 - 10 + 8 \cdot e^{-0,01 \cdot t}$, $8 \cdot e^{-0,01 \cdot t} = 8 \cdot e^{-0,01 \cdot t}$ w.A.

- c) Es ist $a = 12$, $b = 0,02$, damit ist $B'(t) = 12 - 0,02 \cdot B(t) \dots (1)$ mit $k = 0,02$. Es ist $B(t) = G - c \cdot e^{-0,02 \cdot t}$ und $B'(t) = 0,02c \cdot e^{-0,02 \cdot t}$. $B(t)$ und $B'(t)$ in (1) eingesetzt: $0,02c \cdot e^{-0,02 \cdot t} = 12 - 0,02 \cdot B(t)$, $B(t) = \frac{12}{0,02} - c \cdot e^{-0,02 \cdot t}$, $B(t) = 600 - c \cdot e^{-0,02 \cdot t}$. 200 Liter waren zu Beginn im Behälter, so dass $c = 400$. Der Funktionsterm heißt somit $B(t) = 600 - 400 \cdot e^{-0,02 \cdot t}$.

Flüssigkeitsmenge, die nach 1 Stunde ausgeflossen ist:

In jeder Minute fließen 12 Liter hinzu, in einer Stunde sind dies 720 Liter, es waren schon 200 l im Behälter, so dass ohne Abfluss 920 l im Behälter wären. Nun ist $B(60) = 600 - 400 \cdot e^{-0,02 \cdot 60}$, $B(60) = 600 - 400 \cdot e^{-1,2}$, $B(t) = 479,5$. Nach 1 Stunde sind real 479,5 Liter zugeflossen. Dann müssen $920 - 479,5 = 440,5$ Liter abgelaufen sein.

9.b) $\vartheta'(t) = 10 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$, $\vartheta''(t) = -2 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$, $0 = -2 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$, $t = 0$; $\vartheta'(0) = 10$

c) $\bar{\vartheta} = \frac{1}{10} \int_0^{10} \vartheta(t) \cdot dt$, $\bar{\vartheta} = 48,4$

d) $35 = 70 - 50 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$, $\frac{7}{10} = e^{-0,2 \cdot t}$, $t_H = \frac{\ln 0,7}{-0,2}$, $t_H = 1,78$

e) $\vartheta'(t) = 10 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$, $5 = 10 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$, $t_H = \frac{\ln 0,5}{-0,2}$, $t_H = 3,47$

10.a) $f(t) = 36,5 + t \cdot e^{-0,1 \cdot t}$, $f'(t) = e^{-0,1 \cdot t} - 0,1t \cdot e^{-0,1 \cdot t}$, $0 = e^{-0,1 \cdot t}(1 - 0,1t)$, $t_E = 10$.

$f(t_E) = 40,2$. Die Fieberkurve erreicht nach 10 Minuten ihren höchsten Wert von $40,2^\circ\text{C}$.

$f''(t) = -0,1 \cdot e^{-0,1 \cdot t} \cdot (1 - 0,1t) - 0,1 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$, $f''(t) = -0,1 \cdot e^{-0,1 \cdot t}(2 - 0,1t)$, $0,1 \cdot t = 2$, $t_W = 20$, $f'(20) = -0,135$. Betrachtung der globalen Extrema von $f'(x)$: $f'(0) = 1$, $f'(48) = -3,8 \cdot e^{-4,8}$, $f'(48) = -0,031$. Die größte Zunahme der Körpertemperatur erfolgt zum Zeitpunkt $t = 0$ (Zunahmegeschwindigkeit $1 \frac{^\circ\text{C}}{\text{h}}$), die stärkste Abnahme nach 20 Minuten (Abnahmegeschwindigkeit $-0,135 \frac{^\circ\text{C}}{\text{h}}$).

- b) Der Grenzwert liegt bei 37°C : $37 = 36,5 + t \cdot e^{-0,1 \cdot t}$, $0,5 = t \cdot e^{-0,1 \cdot t}$. Gesucht sind die Nullstellen der Funktion $f(t) = -0,5 + t \cdot e^{-0,1 \cdot t}$, GTR: Calc \rightarrow zero: $t_{N_1} = 0,527$, entfällt, $t_{N_2} = 45$. 45 Stunden nach Krankheitsbeginn sinkt die Temperatur wieder unter 37°C . $f(t)$ ist streng monoton fallend bei: $f'(t) < 0$: $e^{-0,1 \cdot t}(1 - 0,1t) < 0$, $1 - 0,1t < 0$, $t > 10$. Die Funktion ist streng monoton fallend ab $t > 10$, somit auch für $t > 45$.

mittlere Körpertemperatur in $^\circ\text{C}$: $\bar{\vartheta} = \frac{1}{45} \int_0^{45} f(t) \cdot dt$, $\bar{\vartheta} = 38,6$

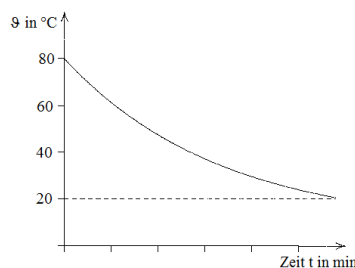
2 Stunden Zeitraum: $f(t+2) - f(t) = 1$: $36,5 + (t+2) \cdot e^{-0,1 \cdot (t+2)} - (36,5 + t \cdot e^{-0,1 \cdot t}) - 1 = 0$, GTR: Calc \rightarrow zero: 2,176. Im Zeitraum 2,2 $\leq t \leq 4,2$ nimmt die Temperatur um 1°C zu.

- c) Funktionsgleichung ermitteln: $f(5) = 36,5 + 5 \cdot e^{-0,1 \cdot 5}$, $f(5) = 39,53$. Dann ist $g(t) = 36,5 + 3,03 \cdot e^{-kt}$, $38,4 = 36,5 + 3,03 \cdot e^{-k \cdot 2}$, $\frac{1,9}{3,03} = e^{-2k}$, $k = -\frac{\ln \frac{1,9}{3,03}}{2}$, $k = 0,2334$, $g(t) = 36,5 + 3,03 \cdot e^{-0,2334 \cdot t}$.

Temperatur um 1°C niedriger als ohne Medikament: $f(t+5) - g(t) = 1$, $36,5 + (t+5) \cdot e^{-0,1 \cdot (t+5)} - (36,5 + 3,03 \cdot e^{-0,2334 \cdot t}) - 1 = 0$, GTR: Calc \rightarrow zero: $t_{N_1} = 1,139$, $t_{N_2} = 30,74$ entfällt. Nach rund 68 Minuten nach der Medikamenteneinnahme ist die Körpertemperatur um ein Grad niedriger, als sie ohne Medikamente wäre.

Begrenzte Abnahme

1. Frisch aufgebrühter 80°C warmer Kaffee wird in einem 20 °C warmen Raum stengelassen. In jedem Moment beträgt die Abkühlung pro Minute 15% der noch vorhandenen Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur.



- a) Bestimmen Sie anhand einer groben Skizze des Temperaturverlaufs einen Funktionsterm für die Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit t . Kontrollieren Sie Ihren Funktionsterm anhand der gegebenen Information zur Abkühlungsgeschwindigkeit.

Die Kaffee-Temperatur wird sich zunächst schnell und dann immer langsamer der Raumtemperatur annähern, sie aber theoretisch nie erreichen. Der Graph sieht aus wie der einer exponentiellen Abnahme, der um 20 nach oben verschoben wurde. Die Funktionsgleichung ist $\vartheta(t) = b \cdot e^{-kt} + 20$. Aus der Anfangsbedingung $\vartheta(0) = 80$ folgt mit $e^{-k \cdot 0} = 1$ sofort: $a = 60$, somit ist $\vartheta(t) = 60 \cdot e^{-kt} + 20$. Die Abkühlgeschwindigkeit ist gegeben durch $\vartheta'(t) = -k \cdot (\vartheta(t) - 20)$. Um k zu bestimmen gilt: $k = -\ln(1 - \frac{p}{100})$, $k = -\ln 0,85$, $k = 0,1625$. Da die Temperaturdifferenzen exponentiell abnehmen, ist $\vartheta(t) = 60 \cdot e^{-0,1625t} + 20$. Zur Kontrolle: $\vartheta'(t) = -0,1625 \cdot 60 \cdot e^{-0,1625t}$, $\vartheta'(t) = -0,1625 \cdot (60 \cdot e^{-0,1625t} + 20 - 20)$, $\vartheta'(t) = -0,1625 \cdot (\vartheta(t) - 20)$. $\vartheta(t) - 20$ ist die Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur.

- b) Ermitteln Sie, wann der Kaffee eine angenehme Trinktemperatur von 45 °C aufweist.

$45^\circ\text{C} = 60^\circ\text{C} \cdot e^{-0,1625 \cdot t} + 20$, $\frac{5}{12} = e^{-0,1625 \cdot t}$, $t = \frac{\ln \frac{5}{12}}{-0,1625}$, $t = 5,39$. Nach rund 5,4 Minuten ist der Kaffee angenehm trinkbar. Schroedel, EdM 11/12 Niedersachsen, S.166 (im Buch falsch gelöst!)

2. Eine Flüssigkeit mit einer Ausgangstemperatur von 80°C wird in einem Raum mit der konstanten Raumtemperatur 18°C abgekühlt. Der Abkühlungsvorgang kann durch die Differenzialgleichung $\vartheta'(t) = -0,05 \cdot (\vartheta(t) - 18)$ mit t in Minuten ab Messbeginn näherungsweise beschrieben werden. Dabei bedeutet $\vartheta(t)$ die Temperatur der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t in °C.

- a) Erläutern Sie, welches Modell dieser Gleichung zugrunde liegt, und geben Sie die Lösung der Differenzialgleichung an. Es liegt das Modell der begrenzten Abnahme zu Grunde. Der Abnahmefaktor ist $k = -0,05$, die Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur beträgt $80^\circ\text{C} - 18^\circ\text{C} = 62^\circ\text{C}$. Die Funktionsgleichung heißt: $\vartheta(t) = 62 \cdot e^{-0,05t} + 18$.

- b) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Flüssigkeit die Temperatur von 30°C erreicht hat. $30^\circ\text{C} = 62^\circ\text{C} \cdot e^{-0,05 \cdot t} + 18$, $\frac{6}{31} = e^{-0,05 \cdot t}$, $t = \frac{\ln \frac{6}{31}}{-0,05}$, $t = 32,85$. Nach rund 33 Minuten hat sich die Flüssigkeit auf 30°C abgekühlt. Schroedel, EdM 11/12 Niedersachsen, S.169, Nr.6

3. Pilze können in Dörrautomaten getrocknet werden und verlieren dabei erheblich an Gewicht. Dies zeigt die folgende Messung:

Trockenzeit t in min	0	1	4	6	9	12	14	20
Gewicht in % des Anfangswertes	100	83	54	39	22	19	14	8

Das Gewicht eines Pilzes sinkt allerdings auch bei längerer Trocknung nicht unter 6% seines Anfangsgewichts.

- a) Stellen Sie die Daten grafisch dar. Welches Wachstumsmodell kann benutzt werden?

Es liegt das Modell der begrenzten Abnahme zu Grunde.

- b) Ermitteln Sie anhand geeigneter Wertepaare den Funktionsterm einer Funktion, welche den Gewichtsverlauf bei diesem Modell näherungsweise beschreibt. Zeichnen Sie den Funktionsgraphen in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a). Für die exponentielle Regression liefert die Liste $L_2 = \{94, 77, 48, 33, 16, 13, 8, 2\}$ den Wert für $b = 0,82975$, d.h. $k = \ln b$, $k = -0,1866$ und $a = 98,04$. Die Funktion heißt $f(t) = 1,96 + 98,04 \cdot e^{-0,1866 \cdot t}$.

Schroedel, EdM 11/12 Niedersachsen, S.169, Nr.8

Begrenzte Abnahme

4. Peter mischt seinen Milchkaffee immer aus gleichen Teilen Kaffee und Milch. Nachdem er den Kaffee frisch aufgebrüht hat, schwankt er zwischen folgenden Möglichkeiten, das Getränk abkühlen zu lassen:

- a) Er gibt in den Kaffee, der noch eine Temperatur von 90°C hat, sofort die entsprechende Menge Milch, die er aus dem Kühlschrank holt (8°C). Dann lässt er den Milchkaffee bei einer Zimmertemperatur von 22°C zum weiteren Abkühlen 5 min stehen. [34;27,3]
 - b) Er lässt den Kaffee zuerst 5 Minuten lang bei Zimmertemperatur abkühlen und mischt danach mit Milch. [52,2;25,6]
- Man kann davon ausgehen, dass sowohl Kaffee als auch Milchkaffee so abkühlen, dass die Abkühlungsgeschwindigkeit 15% der Temperaturdifferenz zwischen der Temperatur der Flüssigkeit und der Zimmertemperatur pro Minute beträgt. Welche Temperatur hat der Milchkaffee jeweils nach weiteren 5 Minuten? Schroedel, EdM 11/12 Niedersachsen, S.169, Nr.9

5. Eine heiße Flüssigkeit wird bei einer konstanten Umgebungstemperatur von 20°C abgekühlt. Die Geschwindigkeit der Temperaturabnahme kann durch eine Funktion a mit $a(t) = -69 \cdot k \cdot e^{-kt}$ näherungsweise beschrieben werden.

- a) Um welche Form von Abkühlungsprozess handelt es sich? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) 3 Minuten nach Messbeginn hatte die Flüssigkeit eine Temperatur von 73°C . Wie hoch war die Temperatur zu Beginn der Messung? [89]
- c) Zu welchem Zeitpunkt nimmt die Temperatur erstmals um weniger als 1 Grad pro Minute ab? [20]

Schroedel, EdM 11/12 Niedersachsen, S.169, Nr.10

6. Nach Angabe des Niedersächsischen Landesamtes für Statistik hat in den letzten 40 Jahren die Zahl der landwirtschaftlichen Betriebe in Niedersachsen in beängstigendem Maße abgenommen.

Jahr	1960	1971	1983	1994	2001	2003	2005
Anzahl	213.112	159.941	116.728	83.259	63.102	57.588	53.404

- a) Untersuchen Sie, ob es sich bei der Entwicklung der landwirtschaftlichen Betriebe in Niedersachsen um eine exponentielle Abnahme handelt. Geben Sie eine Funktion an, welche die Abnahme näherungsweise beschreibt. Wie viele landwirtschaftliche Betriebe erwarten Sie danach im Jahr 2015 in Niedersachsen? [41087]
- b) Entwerfen Sie ein zweites Modell, mit dem Sie den Rückgang der Zahl der landwirtschaftlichen Betriebe beschreiben können. Berechnen Sie die Zahl landwirtschaftlicher Betriebe im Jahr 2015, wenn angenommen wird, dass die Mindestzahl von 40000 in Zukunft nicht unterschritten wird und sich der Proportionalitätsfaktor verdoppelt. [46208]
- c) Vergleichen Sie beide Modelle und beurteilen Sie deren Güte.

Schroedel, EdM 11/12 Niedersachsen, S.170, Nr.12

7. Ein Land, das im Jahr 2000 noch 40 Millionen Einwohner hatte, würde einen jährlichen Bevölkerungsschwund (Änderungsgeschwindigkeit) von 3% verzeichnen, wenn es nicht jährlich 120000 Einwanderer aufnehmen würde. (Hinweis: Es handelt sich um eine beschränkte Abnahme! Die Grenze G liegt bei $G = \frac{120000}{k}$)

- a) Wie lautet die Differenzialgleichung, mit der sich die Entwicklung der Einwohnerzahl näherungsweise beschreiben lässt? [$f'(t) = 0,03 \cdot (4 - f(t))$]
- b) Wie viele Einwohner erwartet man im Jahr 2030? [18,64]
- c) Wie wird sich die Einwohnerzahl langfristig entwickeln? [4]

Aufgabe von G.Roolfs

Begrenzte Abnahme

4.a) Die Mischungstemperatur beträgt $\vartheta_{m_1} = \frac{90^\circ\text{C} + 8^\circ\text{C}}{2}$, $\vartheta_{m_1} = 49^\circ\text{C}$. Funktionsgleichung: $\vartheta_1 = 22 + 27 \cdot e^{\ln 0,85 \cdot t}$. Nach 5 Minuten: $\vartheta_{1,5\text{min}} = 22 + 27 \cdot e^{\ln 0,85 \cdot 5}$, $\vartheta_{1,5\text{min}} = 34$. Nach 10 Minuten: $\vartheta_{1,10\text{min}} = 27,3$. Nach 5 Minuten beträgt die Temperatur des Milchkaffees 34°C und nach weiteren 5 Minuten $27,3^\circ\text{C}$.

b) Funktionsgleichung für die ersten 5 Minuten: $\vartheta_2 = 22 + 68 \cdot e^{\ln 0,85 \cdot t}$, $\vartheta_{2,5\text{min}} = 52,2$. Die Temperatur des Kaffees beträgt nach 5 Minuten $52,2^\circ\text{C}$. Nun wird die Milch hinzugegeben. Die Mischungstemperatur beträgt $\vartheta_{m_2} = \frac{52,2^\circ\text{C} + 8^\circ\text{C}}{2}$, $\vartheta_{m_2} = 30,1^\circ\text{C}$. Neue Funktionsgleichung: $\vartheta_2^* = 22 + 8,1 \cdot e^{\ln 0,85 \cdot t}$, $\vartheta_{2,5\text{min}}^* = 22 + 8,1 \cdot e^{\ln 0,85 \cdot 5}$, $\vartheta_{2,5\text{min}}^* = 25,6$. Nach weiteren 5 Minuten beträgt die Temperatur des Milchkaffees $25,6^\circ\text{C}$. Der Unterschied zum Aufgabenteil a) beträgt nur $1,7^\circ\text{C}$.

5.a) Es liegt begrenzte Abnahme vor, da sich die Flüssigkeit nicht unter der Umgebungstemperatur abkühlt.

b) Funktionsgleichung: $f(t) = a + b \cdot e^{-kt}$, $f(t) = 20 + 69 \cdot e^{-kt}$, $73 = 20 + 69 \cdot e^{-k \cdot 3}$, $e^{-3k} = \frac{53}{69}$, $k = -\frac{1}{3} \ln \frac{53}{69}$, $k = 0,08794$, d.h. $f(t) = 20 + 69 \cdot e^{-0,08794 \cdot t}$, $f(0) = 20 + 69$, $f(0) = 89$. Zu Beginn der Messung hatte die Flüssigkeit eine Temperatur von 89°C .

c) Gesucht ist der Zeitpunkt, wo $\frac{f(t) - f(t+1)}{1 \text{ min}} < 1 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$, $\frac{20^\circ\text{C} + 69^\circ\text{C} \cdot e^{-0,08794 \cdot t} - (20^\circ\text{C} + 69^\circ\text{C} \cdot e^{-0,08794 \cdot (t+1)})}{1 \text{ min}} < 1 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$, $69^\circ\text{C} \cdot e^{-0,08794 \cdot t} - 69^\circ\text{C} \cdot e^{-0,08794 \cdot t} \cdot e^{-0,08794} < 1^\circ\text{C}$, $69 \cdot e^{-0,08794 \cdot t} (1 - e^{-0,08794}) < 1$, $e^{-0,08794 \cdot t} < \frac{1}{69 \cdot (1 - e^{-0,08794})}$, $t > -\frac{1}{0,08794} \ln \frac{1}{69 \cdot (1 - e^{-0,08794})}$, $t > \frac{1}{0,08794} \ln(69 - 69e^{-0,08794})$, $t = 20$. Nach 20 Minuten nimmt die Temperatur erstmals um weniger als 1 Grad pro Minute ab.

6.a) Exponentielle Abnahme, Funktionsgleichung durch exponentielle Regression: Mit den Listen $L_1 = \{0, 11, 23, 34, 41, 43, 45\}$, $L_2 = \{213112, 159941, 116728, 83259, 57588, 53404\}$ und GTR: STAT → CALC → 0:ExpReg L_1, L_2 erhält man $a = 223193$, $b = 0,9697$, d.h. $f_1(x) = 223193 \cdot 0,9697^x$ bzw. $f_1(x) = 223193 \cdot e^{-0,03077 \cdot x}$. Betriebe 2015: $f_1(55) = 41087$

b) Zweites, besseres Modell: Exponentielle begrenzte Abnahme, da es in nächster Zukunft immer eine bestimmte Anzahl landwirtschaftlichen Betriebe geben wird. Grenze: 40000, $k = -0,06154$. Funktionsgleichung: $f_2(x) = 40000 + 173112 \cdot e^{-0,06154 \cdot x}$, $f_2(x) = 40000 + 173112 \cdot e^{-0,06154 \cdot x}$, $f_2(55) = 45866$.

Im Jahr 2015 wird es nach dem 2. Modell 45866 Betriebe geben.

c) Zweites Modell ist realistischer, die Anzahl der Betriebe ist im Jahr 2015 danach um rund 4800 Betriebe höher. Man sollte die Güte der Modelle im Jahr 2015 nach der Bekanntgabe der aktuellen Zahlen noch einmal überprüfen.

7.a) Benutzung der Faustregel: Wenn $p < 10\%$, so ist $k = p = -\ln(1 - p)$. Hier $p = 3\%$: $0,03 = -\ln(0,97)$, $0,03 \approx 0,03046$, $k = 0,03$. $G = \frac{120000}{0,03}$, $G = 4.000.000$, $G = 4 \text{ Mill.}$
 $f(t) = 4 + 36 \cdot e^{-0,03 \cdot t}$, $f'(t) = -0,03 \cdot 36 \cdot e^{-0,03 \cdot t}$, $f'(t) = -0,03 \cdot (f(t) - 4)$,
 $f'(t) = 0,03 \cdot (4 - f(t))$. Die Differenzialgleichung lautet $f'(t) = 0,03 \cdot (4 - f(t))$.

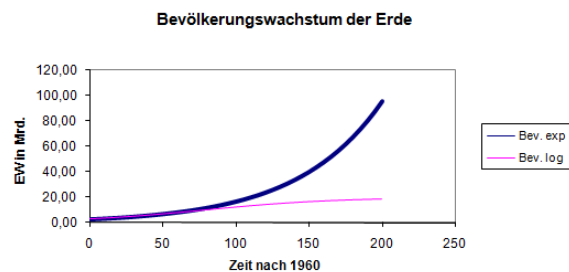
b) $f(30) = 4 + 36 \cdot e^{-0,03 \cdot 30}$, $f(30) = 18,84$. Im Jahr 2030 erwartet man 18,84 Mill. Einwohner.

c) $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (4 + 36 \cdot e^{-0,03 \cdot t})$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 4$. Die Einwohnerzahl wird gegen die Grenze von 4 Millionen streben.

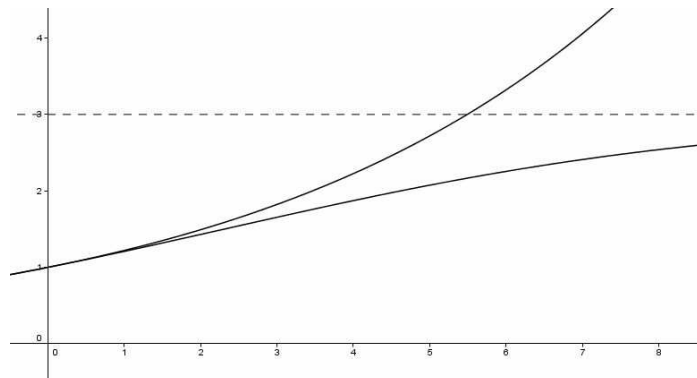
Logistisches Wachstum

In einer endlichen Welt kann weder lineares noch exponentielles Wachstum unbegrenzt andauern; irgendwann ist eine Grenze erreicht, die nicht überschritten werden kann. Meistens sind diese Grenze äußere Umwelteinflüsse, wie ein begrenztes Nahrungs- oder Ausbreitungsangebot. Die einzige Population, die ein ungehindertes Wachstum aufweist, ist die Art *Homo Sapiens*. Exponentielles Wachstum lässt sich nur verwirklichen, wenn keine Feinde, kein Nahrungsmangel, insgesamt also optimale Lebensbedingungen und genug Raum zur Ausbreitung vorhanden sind. Unter besonderen Verhältnissen (Seuchen, kriegerische Zerstörung) sowie unter natürlichen Beobachtungen kann die Abnahme eines Populationswachstums bei zunehmender Populationsgröße vermuten lassen, dass die Populationsgröße selbst auf die Geburtenrate hemmend und/oder auf die Sterblichkeit fördernd wirkt. Eine einfache modellhafte Formulierung, die dieser Aussage Ausdruck gibt, ist die logistische Formel des Populationswachstums.

Ein mathematisches Modell, in dem dies berücksichtigt wird, ist das logistische Wachstum, das der Belgier Pierre-Francois Verhulst (1804 - 1849) im Jahre 1837 vorschlug. Durch eine mit steigender Population fallende Wachstumsrate sorgt es dafür, dass schließlich ein stabiles Gleichgewicht erreicht wird. Dieses Modell kommt der Realität sehr nah, da es mehr Faktoren als das lineare, beschränkte oder exponentielle Wachstum berücksichtigt. Betrachtet man jedoch zum Beispiel Bevölkerungszahlen, so erkennt man, dass global gesehen die Weltbevölkerungswachstumsrate steigt. Man kann also nie die Realität, das Leben berechnen, sondern nur Prognosen anstellen. Komplexe mathematische Modelle kommen der Praxis jedoch oft sehr nah.



In nebenstehenden Diagramm wird das Wachstum von Bakterien beschrieben. Man erkennt, dass die Anzahl der Bakterien, die auf der y-Achse aufgetragen ist, am Anfang langsam steigt, die Wachstumsrate also gering ist. Sie nimmt jedoch dann zu, bis 50 % des Sättigungsmankos (oder der maximalen Anzahl an Bakterien) erreicht worden sind.

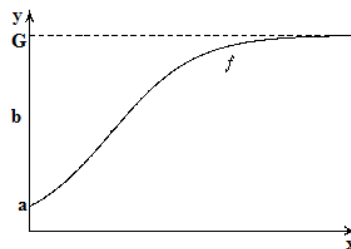


Nun nimmt die Wachstumsrate wieder ab, bis sie schließlich wieder gegen Null strebt. ERKLÄRUNG: Die anfangs wenigen Bakterien können sich aufgrund ihrer geringen Anzahl nur wenig vermehren und das Sättigungsmanko spielt noch eine geringe bzw. keine Rolle für die Fortpflanzung. Der 1. Teil des Logarithmischen Wachstums gleicht einem exponentiellen Wachstum. Der 2. Teil gleicht jedoch einem begrenzten Wachstum, da mit zunehmender Anzahl jetzt die Wachstumsrate sinkt. Da das Sättigungsmanko immer kleiner wird, nimmt die Wachstumsrate immer mehr ab, bis sie schließlich gegen Null strebt. Die Sättigung ist dann erreicht.

Das logistische Wachstum kann für die Beschreibung verschiedenster natürlicher Vorgänge verwendet werden, zum Beispiel: Schneeschuhhase, Karibu und arktische Schneehasen, Wühlmaus - Art *Lemmus lemmus*, „Zigeunermotte“ (*Lymantria dispar*) in den USA, Maikäfergenerationen, für Probleme der Genetik, Lerntheorie, Insektenforschung, Laser-Physik, Theorie der Molekularentwicklung, turbulente Flüssigkeitsströmungen.

Logistisches Wachstum

Beim exponentiellen Wachstum ist die Steigerungsrate immer abhängig vom momentanen Bestand: $f'(x) = k_1 \cdot f(x)$. Die Lösung der Gleichung ist die Funktion $f(x) = a \cdot e^{k_1 \cdot x}$. Beim begrenzten Wachstum ist die zeitliche Steigerungsrate vom verfügbaren Rest abhängig, das bedeutet vom Grenzwert G abzüglich des momentanen Bestandes: $f'(x) = k_2 \cdot (G - f(x))$.



Die Lösung der Gleichung ist die Funktion $f(x) = G - b \cdot e^{-k_2 \cdot x}$

mit $b = G - a$. Das logistische Wachstum beinhaltet beide Faktoren. Die Wachstumsrate $f'(x)$ ist also zu beiden Faktoren proportional, dem momentanen Bestand $f'(x) \sim f(x)$ und zum Rest $f'(x) \sim (G - f(x))$. Es gilt: $f'(x) \sim f(x) \cdot (G - f(x))$. Aus dieser Proportionalität kann man mit Hilfe einer Konstanten k eine Differentialgleichung machen: $f'(x) = k \cdot f(x) \cdot (G - f(x))$. Da das k sich aber aus den Bestandteilen des exponentiellen und des beschränkten Wachstums zusammensetzt, kann k mit den Korrekturfaktoren A und B wie folgt definiert werden:

$k = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot (G - f(x))} \dots (3)$, $k = A \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} + B \cdot \frac{f'(x)}{G - f(x)}$, $k = \frac{A \cdot f'(x) \cdot (G - f(x)) + B \cdot f'(x) \cdot f(x)}{f(x) \cdot (G - f(x))}$, $k = \frac{f'(x) \cdot [A \cdot (G - f(x)) + B \cdot f(x)]}{f(x) \cdot (G - f(x))}$, $k = \frac{f'(x) \cdot [A \cdot G - A \cdot f(x) + B \cdot f(x)]}{f(x) \cdot (G - f(x))}$. Der Vergleich mit (3) zeigt, dass $A \cdot G - A \cdot f(x) + B \cdot f(x) = 1$. Die Gleichung ist dann erfüllt, wenn $A = B$ und $A = \frac{1}{G}$. Somit ist $k = \frac{f'(x)}{G \cdot f(x)} + \frac{f'(x)}{G \cdot (G - f(x))}$. Integriert man beide Seiten der Gleichung, entsteht $\int k \cdot dx = \int \frac{f'(x)}{G \cdot f(x)} dx + \int \frac{f'(x)}{G \cdot (G - f(x))} dx$, $kx + c = \frac{1}{G} \ln|f(x)| - \frac{1}{G} \ln|G - f(x)|$. Da $f(x) > 0$ und $G - f(x) > 0$, ist $G(kx + c) = \ln \frac{f(x)}{G - f(x)}$, $e^{G(kx+c)} = \frac{f(x)}{G - f(x)}$, $G \cdot e^{G(kx+c)} - e^{G(kx+c)} \cdot f(x) = f(x)$, $G \cdot e^{G(kx+c)} = f(x) \cdot (1 + e^{G(kx+c)})$, $f(x) = \frac{G \cdot e^{G(kx+c)}}{1 + e^{G(kx+c)}}$, $f(x) = \frac{G}{1 + e^{-G(kx+c)}}$, $f(x) = \frac{G}{1 + e^{-Gkx - Gc}}$, $f(x) = \frac{G}{1 + e^{-Gkx} \cdot e^{-Gc}} \dots (4)$. Bestimmung der Integrationskonstanten c : $f(0) = \frac{G}{1 + e^{-G \cdot 0} \cdot e^{-Gc}}$, $a = \frac{G}{1 + e^{-Gc}}$, $e^{-Gc} = \frac{G}{a} - 1$, $e^{-Gc} = \frac{G-a}{a}$, $e^{-Gc} = \frac{b}{a}$ mit $b = G - a$. Setzt man somit in (4) $e^{-Gc} = \frac{b}{a}$, liefert dies die logistische Wachstumsfunktion $f(x) = \frac{G}{1 + \frac{b}{a} e^{-Gkx}}$.

1. Eine Untersuchung des Höhenwachstums von Hopfen ergab folgende Werte:

Zeit (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12	16
Höhe (in m)	0,6	1,2	2	3,3	4,1	5	5,5	5,8

- Schätzen Sie die Sättigungsgrenze und bestimmen Sie den fehlenden Parameter in der logistischen Funktion mithilfe eines Messpunktes. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der logistischen Regressionskurve. [mit $f(10) = 5 \rightarrow f(x) = \frac{6}{1 + 9 \cdot e^{-6,0634 \cdot x}}$, $f(x) = \frac{5,93}{1 + 8,647 \cdot e^{-0,3825 \cdot x}}$]
- Bestimmen Sie die Höhe des Hopfens nach 17 Wochen. [5,85]
- Wächst der Hopfen nach 2 Wochen schneller als nach 10 Wochen? [0,362; 0,303]
- Zu welchem Zeitpunkt wächst der Hopfen am schnellsten? [5,64] Aufgabe von G.Roolfs

2. Von 6000 isoliert lebenden Menschen (z.B. Indianerstamm) infiziert sich eine Person an Grippe. Durch gegenseitige Ansteckung zählt man nach 5 Wochen bereits 400 Kranke.

- Um die Ausbreitung dieser Grippe zu modellieren, geht man von logistischem Wachstum der Anzahl K der Erkrankten aus. Was spricht für diese Annahme?
- Bestimmen Sie den Funktionsterm. Nach welcher Zeit ist die Hälfte der Bewohner krank? Welche Bedeutung hat dieser Zeitpunkt für die weitere Ausbreitung der Krankheit? [7,2]
- Wie groß ist in den ersten 2 Monaten die mittlere Zunahme an Erkrankten pro Woche? [548] Aufgabe von G.Roolfs

3. Die Tabelle zeigt die Erdbevölkerungsentwicklung.

Jahr	1804	1927	1960	1974	1987	1999	2005
Anzahl (in Mrd.)	1	2	3	4	5	6	6,5

- Geben Sie eine logistische Regressionskurve an (mit dem GTR nur die letzten 4 Wertepaare berücksichtigen). Welche Sättigungsgrenze beinhaltet sie? [12,6]
- In welchem Jahr sind demnach 7 (8, 9) Mrd. Menschen zu erwarten? Aufgabe von G.Roolfs

Logistisches Wachstum

4. Für das Wachstum eines Kürbis einer bestimmten Sorte hat eine Biologin das folgende Modell aufgestellt: $f(x) = \frac{4000 \cdot e^{0,05 \cdot x}}{19 + e^{0,05 \cdot x}}$. Dabei ist x ($x \geq 0$) die Zeit in Tagen, $f(x)$ bezeichnet die Masse des Kürbis in Gramm.
- a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion ($0 \leq x \leq 300$).
 Ermitteln Sie, wie schwer der Kürbis zu Beginn war. [200]
 Berechnen Sie, wie schwer der Kürbis maximal werden kann. [4000]
 Ermitteln Sie grafisch, zu welchem Zeitpunkt die Wachstumsgeschwindigkeit maximal ist.
 Geben Sie an, wie hoch diese Wachstumsgeschwindigkeit ist. [58,9;50]
- b) Berechnen Sie, wie schwer der Kürbis nach einem Monat ist. [763,4]
 Schätzen Sie ab, wie viel Gramm in der Stunde stärksten Wachstums hinzukommen. [2]
 Berechnen Sie, nach welcher Zeit 90% der maximalen Kürbismasse erreicht sind. [102,8]
- c) Für die Ableitung f' gilt (kein Nachweis erforderlich): $f'(x) = 0,05 \cdot f(x) - \frac{0,05}{4000} \cdot f^2(x)$.
 Bestimmen Sie damit den Wendepunkt exakt (notw. Bed. reicht aus). [W(58,9;2000)]
 Erläutern Sie die Bedeutung des Wendepunktes für das Wachstum des Kürbis. Bringen Sie die DGL auf die Form: $f'(x) = k \cdot (G - f(x)) \cdot f(x)$.
 Was beinhaltet diese DGL in Hinblick auf die Wachstumsgeschwindigkeit? Vergleichen Sie dieses Wachstum mit dem exponentiellen und dem beschränkten Wachstum.
- d) Obige Funktion f gehört für $a = 19$ zu der Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{4000 \cdot e^{0,05 \cdot x}}{a + e^{0,05 \cdot x}}$, $a > 0$.
 Untersuchen Sie graphisch den Einfluss des Parameters a auf den Verlauf des Graphen.
 Zeigen Sie, dass gilt: $f_a'(x) = \frac{200a \cdot e^{0,05 \cdot x}}{(a + e^{0,05 \cdot x})^2}$.
 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f_a .
- e) Folgende Information können Sie ohne Nachweis benutzen: $f_a''(x) = \frac{10a \cdot e^{0,05 \cdot x} \cdot (a - e^{0,05 \cdot x})}{(a + e^{0,05 \cdot x})^3}$.
 Berechnen Sie die maximale Wachstumsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von a . [50]
 Auf welcher Ortskurve liegen die Wendepunkte von f_a ? [y = 2000]
- f) Der Graph von f_a , die y-Achse und die Gerade $y = 4000$ begrenzen im ersten Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks. [800000 ln(a + 1)]
- Aufgabe von G.Roolfs
5. Die Höhe von Sonnenblumen wird während des Wachsens gemessen. Zu Beginn der Messungen beträgt die Höhe im Schnitt 0,1 (m), nach 100 Tagen 1,27 (m) und nach 180 Tagen 1,94 (m).
- a) Ermitteln Sie eine Funktion, die das Höhenwachstums beschreibt und stellen Sie eine begründete Vermutung über die Höhe einer ausgewachsenen Sonnenblume auf. [2]
- b) Ein Biologe verwendet zur Modellierung des Höhenwachstums der Sonnenblume die Funktion $f_k(x) = \frac{2e^{kx}}{e^{kx} + 19}$, $k > 0$.
 Untersuchen Sie ohne GTR, ob f_k streng monoton steigend ist.
 Nach welcher Zeit (k -abhängig) hat sich die durch f_k festgelegte Anfangslänge verdoppelt?
 Welchen Einfluss hat k auf den Verlauf des Graphen? [$\frac{1}{k} \ln \frac{19}{9}$]
- c) Der Biologe verwendet allgemein zur Wachstums-Modellierung die Funktion $h(x) = \frac{a \cdot e^{kx}}{e^{kx} + b}$, a, b und k positiv.
 Wie groß ist dann (allgemein) die Grenzhöhe G ? [a]
 Bestimmen Sie a und b so, dass eine Sonnenblume zu Beginn der Messung 0,2 (m) hoch ist und die Grenzhöhe 1,8 (m) beträgt. [1,8;8]
- d) Die Funktion $g(x) = \frac{f_k'(x)}{f_k(x)}$ beschreibt die momentane Wachstumsgeschwindigkeit bezogen auf eine Höheneinheit. Erläutern Sie den Sinn dieser Funktion.
 Bestimmen Sie den Grenzwert von $g(x)$ für $x \rightarrow \infty$. [0]
 Berechnen Sie das Integral $\int_0^\infty g(x) \cdot dx$. [ln20]
- Aufgabe von G.Roolfs

6. Bestimmte Wachstumsvorgänge werden beschrieben durch Funktionen f_k mit $f_k(t) = \frac{100}{1+79e^{-kt}}$, $k > 0$, wobei $f_k(t)$ den „Bestand“ zu einem Zeitpunkt t ($t \geq 0$) angibt.
- a) Bestimmen Sie einen Wert für k so, dass $f_k(15) \approx 35$ ist. [0,25]
 Skizzieren Sie den Graphen zu $f_{0,25}$.
 Bestimmen Sie für $k = 0,25$ den Zeitpunkt t , ab dem der „Bestand“ 99 % des maximalen „Bestandes“ überschreitet. [35,86]
 Bestimmen Sie die erste Ableitungsfunktion von f_k . Dokumentieren Sie einen Rechenweg, der ohne den Einsatz des GTR durchgeführt werden kann.
 Untersuchen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit dieser Vorgänge: Bestimmen Sie die Bereiche, in denen sie zu- bzw. abnimmt, sowie die maximale Wachstumsgeschwindigkeit. [25k]
- b) Bestimmen Sie eine Funktion g so, dass die Differenzialgleichung $g'(t) = a \cdot g(t)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ gilt und für $t = 0$ und $t = 15$ die Funktionswerte $g(t)$ und $f_{0,25}(t)$ übereinstimmen. [25k]
 $[g(t) = \frac{5}{4} \cdot e^{0,222 \cdot t}]$
 Für die Funktion $f_{0,25}$ gilt: $f'_{0,25}(t) = \frac{1}{100} \cdot 0,25 \cdot f_{0,25}(t) \cdot (100 - f_{0,25}(t))$. Deuten Sie aufgrund dieser Aussage den Verlauf des Graphen von $f_{0,25}$.

Niedersachsen – Mathematik Zentralabitur 2007 – Erhöhtes Anforderungsniveau-CAS

7. Eine Forschungsgruppe versucht, die Entwicklung eines Fischbestandes in einem See durch ein mathematisches Modell zu erfassen. Zu Beginn der Untersuchung leben im See 4,0 Millionen Fische. Die Änderungsrate des Bestandes wird in diesem Modell durch eine Funktion f mit $f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$ mit $t \geq 0$ beschrieben (t in Jahren seit Untersuchungsbeginn, $f(t)$ in Millionen pro Jahr).
- a) Skizzieren Sie das Schaubild von f für $0 \leq t \leq 6$.
 Untersuchen Sie das Verhalten von f für $t \rightarrow \infty$.
 Weisen Sie nach, dass f für $t > 0$ monoton abnimmt. Bedeutet dies, dass der Fischbestand abnimmt? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(t) = \frac{-1}{e^t+1}$ eine Stammfunktion von f ist.
 Welcher Fischbestand ist zwei Jahre nach Beginn der Untersuchung zu erwarten? Welcher Fischbestand ist langfristig zu erwarten?

Ein Teich bietet Platz für maximal 7000 Fische. In einem Modell soll angenommen werden, dass die Änderungsrate des Fischbestandes proportional zur Anzahl der noch Platz findenden Fische ist. Anfangs befinden sich 4000 im Teich. Nach einem Monat sind 4400 Fische vorhanden.

- c) Geben Sie eine zugehörige Differenzialgleichung an. Bestimmen Sie eine Funktion, welche diesen Fischbestand in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
- d) Nach wie vielen Monaten sind 5000 Fische in dem Teich vorhanden?
 Wie viele Fische müssten sich am Anfang im Teich befinden, damit bei unveränderten Wachstumsbedingungen erst nach fünf Monaten 5000 Fische vorhanden sind?

Abiturprüfung Mathematik 2005 Baden-Württemberg Aufgabe I, 3

Logistisches Wachstum

1. a) Schätzung: $G = 6$, $a = 0,6$, $b = 6 - 0,6$, $b = 5,4$, $\frac{b}{a} = 9$, k bestimmen: z.B. $f(10) = 5$,
 $5 = \frac{6}{1+9 \cdot e^{-60k}}$, $5 \cdot (1+9 \cdot e^{-60k}) = 6$, $9 \cdot e^{-60k} = 0,2$, $-60k = \ln \frac{1}{45}$, $k = \frac{\ln \frac{1}{45}}{-60}$, $k = 0,0634$.
Die geschätzte Funktionsgleichung heißt $f(x) = \frac{6}{1+9 \cdot e^{-60 \cdot 0,0634 \cdot x}}$, $f(x) = \frac{6}{1+9 \cdot e^{-0,381 \cdot x}}$.
Zum Vergleich: GTR: STAT→CALC→B:Logistic L₁,L₂: $a = 8,647$, $b = 0,3825$, $c = 5,93$
d.h. $f(x) = \frac{5,93}{1+8,647 \cdot e^{-0,3825 \cdot x}}$.
b) mit Regressionskurve: $f(17) = \frac{5,93}{1+8,647 \cdot e^{-0,3825 \cdot 17}}$, $f(17) = 5,854$
c) Ableitungsfunktion mit GTR zeichnen: $Y_1 = 5,93 / (1 + 8,647 \cdot e^{(-0,3825X)})$, $Y_2 \rightarrow$ MATH 8:
→nDerive(Y₁,X,X); $f(2)$ und $f(10)$ von Y_2 bestimmen: GTR: im Grafikmodus: CALC→
1:value, $f(2) = 0,362$, $f(10) = 0,303$. Der Hopfen wächst nach 2 Wochen etwas schneller
als nach 10 Wochen.
d) GTR: Maximum von Y_2 im Grafikmodus: CALC→4:maximum $f(5,64) = 0,567$,
Der Hopfen wächst nach 5,64 Wochen am schnellsten.

2. a) Zuwachs ist proportional zu $K(x)$ und $6000 - K(x)$
b) $G = 6000$, $a = 1$, $b = 5999$, $K(5) = 400$, $400 = \frac{6000}{1+5999 \cdot e^{-6000k \cdot 5}}$, $1+5999 \cdot e^{-30000k} = 15$,
 $e^{-30000k} = \frac{14}{5999}$, $k = \frac{1}{-30000} \ln \frac{14}{5999}$, $k = 0,000202$, $K(x) = \frac{6000}{1+5999 \cdot e^{-6000 \cdot 0,000202 \cdot x}}$, $K(x) = \frac{6000}{1+5999 \cdot e^{-1,212 \cdot x}}$,
 $3000 = \frac{6000}{1+5999 \cdot e^{-1,212 \cdot x}}$, $1+5999 \cdot e^{-1,212 \cdot x} = 2$, $e^{-1,212 \cdot x} = \frac{1}{5999}$, $x = \frac{\ln \frac{1}{5999}}{-1,212}$, $x = 7,18$. Nach etwas
mehr als 7 Wochen ist die Hälfte der Bewohner erkrankt. Es ist die Wendestelle von $K(x)$
und das Maximum von $K'(x)$. Ab diesem Zeitpunkt nimmt die Anzahl der Erkrankungen
wieder ab, pro Woche gibt es jetzt weniger Erkrankte.
c) Die Funktionen sind im GTR: $Y_1 = 6000 / (1 + 5999 \cdot e^{(-1,212X)})$, $Y_2 = nDerive(Y_1, X, X)$,
mittlere Zunahme in den ersten 8 Wochen: $\frac{K(8)}{8} = \frac{4382}{8}$, $\frac{K(8)}{8} = 548$ oder GTR: MATH→
9:fnInt($Y_2, X, 0, 8$)/8, d.h. $\frac{1}{8} \int_0^8 K'(x) \cdot dx = 548$, da $\int_0^8 K'(x) \cdot dx = K(8)$.

3. Mit den Listen $L_1 = \{0,13,25,31\}$, $L_2 = \{4,5,6,6,5\}$ und GTR: STAT→CALC→B:Logistic
 L_1, L_2 erhält man $a = 2,15$, $b = 0,02677$, $c = 12,6$, d.h. $f(x) = \frac{12,6}{1+2,15 \cdot e^{-0,02677 \cdot x}}$ mit $G = 12,6$ als
Sättigungsgrenze. Jahr mit 7 Mrd. Menschen: $7 = \frac{12,6}{1+2,15 \cdot e^{-0,02677 \cdot x}}$, $1+2,15 \cdot e^{-0,02677 \cdot x} = \frac{12,6}{7}$,
 $2,15 \cdot e^{-0,02677 \cdot x} = \frac{12,6}{7} - 1$, $x = \frac{1}{-0,02677} \ln \frac{5,6}{7,2,15}$, $x = 36,9$, d.h. 2011: Jahr mit 8 Mrd.
Menschen: $8 = \frac{12,6}{1+2,15 \cdot e^{-0,02677 \cdot x}}$, $x = \frac{1}{-0,02677} \ln \frac{4,6}{8,2,15}$, $x = 49,3$, d.h. 2023, Jahr mit 9 Mrd.
Menschen: $9 = \frac{12,6}{1+2,15 \cdot e^{-0,02677 \cdot x}}$, $x = \frac{1}{-0,02677} \ln \frac{3,6}{9,2,15}$, $x = 62,8$, d.h. 2037.

4. a) $f(0) = \frac{4000}{20}$, $f(0) = 200$. Zu Beginn war der Kürbis 200 g schwer.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4000 \cdot e^{0,05 \cdot x}}{e^{0,05 \cdot x} \cdot (\frac{19}{e^{0,05 \cdot x}} + 1)}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4000$. Er kann 4 kg schwer werden.
Die Funktionen sind im GTR: $Y_1 = 4000 \cdot e^{(0,05X)} / (19 + e^{(0,05X)})$, $Y_2 = nDerive(Y_1, X, X)$,
mit Y_2 im Window Xmin= -5, Xmax=200, Ymin= -1, Ymax= 60. Y_2 :CALC→
4:maximum, $f(58,89) = 50$. Nach rund 59 Tagen ist die Wachstumsgeschwindigkeit
maximal, sie beträgt 50 g pro Tag.
b) $f(30) = 763,4$; stärkstes Wachstum pro Stunde: GTR: $m = \frac{50 \text{ g}}{1 \text{ d}}$, $m = \frac{50 \text{ g}}{24 \text{ h}}$, $m \approx 2 \frac{\text{g}}{\text{h}}$. In der
Stunde des stärksten Wachstums kommen 2 g an Masse hinzu. 90% der max. Kürbis-
masse: $3600 = \frac{4000 \cdot e^{0,05 \cdot x}}{19 + e^{0,05 \cdot x}}$, $0,9 \cdot (19 + e^{0,05 \cdot x}) = e^{0,05 \cdot x}$, $17,1 = 0,1 \cdot e^{0,05 \cdot x}$, $x = \frac{\ln 171}{0,05}$, $x = 102,8$.
Nach 103 Tagen hat der Kürbis 90% der maximalen Kürbismasse erreicht.
c) $f''(x) = 0,05 \cdot f'(x) - 2 \cdot \frac{0,05}{4000} \cdot f(x) \cdot f'(x)$, $0 = f'(x) \cdot (0,05 - \frac{0,1}{4000} \cdot f(x))$, Satz: Ein Produkt
ist Null, wenn mindestens 1 Faktor Null ist. $f'(x) = 0$ d.h. Berechnung des Extremas,
 $0 = 0,05 - \frac{1}{40000} \cdot f(x)$, $\frac{4000 \cdot e^{0,05 \cdot x}}{19 + e^{0,05 \cdot x}} = 40000 \cdot 0,05$, $e^{0,05 \cdot x} = \frac{1}{2} \cdot (19 + e^{0,05 \cdot x})$, $\frac{1}{2} e^{0,05 \cdot x} = 9,5$,

Logistisches Wachstum

$$x = \frac{\ln 19}{0,05}, x_W = 20 \cdot \ln 19, x_W = 5,83. f(20 \ln 19) = 2000, W(20 \ln 19; 2000).$$

Im Wendepunkt ist die Massenzunahme pro Tag am größten, der Kürbis hat zu diesem Zeitpunkt die Hälfte seiner Endmasse erreicht.

$$f'(x) = 0,05 \cdot f(x) - \frac{0,05}{4000} \cdot f^2(x), f'(x) = 0,05 \cdot f(x) \cdot \left(1 - \frac{1}{G} \cdot f(x)\right), f'(x) = 0,05 \cdot f(x) \cdot \frac{G-f(x)}{G},$$

$$f'(x) = \frac{0,05}{4000} \cdot f(x) \cdot (G - f(x)), f'(x) = k \cdot f(x) \cdot (G - f(x)) \text{ mit } k = \frac{1}{80000}. \text{ Der Wachstumsfaktor beträgt } k = \frac{1}{80000}. \text{ Das logistische Wachstum beinhaltet exponentielles und bechränktes Wachstum.}$$

d) Der Parameter a legt den Startwert $f(0)$ der fest. So ist bei $a = 19$ $f(0) = 200$.

$$f_a(x) = \frac{4000 \cdot e^{0,05 \cdot x}}{a + e^{0,05 \cdot x}}, f_a'(x) = \frac{200 \cdot e^{0,05 \cdot x} \cdot (a + e^{0,05 \cdot x}) - 0,05 e^{0,05 \cdot x} \cdot 4000 \cdot e^{0,05 \cdot x}}{(a + e^{0,05 \cdot x})^2}, f_a'(x) = \frac{200 \cdot e^{0,05 \cdot x} \cdot (a + e^{0,05 \cdot x} - 20)}{(a + e^{0,05 \cdot x})^2},$$

$$f_a'(x) = \frac{200 \cdot a \cdot e^{0,05 \cdot x}}{(a + e^{0,05 \cdot x})^2}. \text{ Monotonie für } a > 0: \text{ streng monoton steigend, da } f_a'(x) > 0.$$

e) $f_a''(x) = \frac{10a \cdot e^{0,05 \cdot x} \cdot (a - e^{0,05 \cdot x})}{(a + e^{0,05 \cdot x})^3}, 0 = a - e^{0,05 \cdot x}, e^{0,05 \cdot x} = a, x_W = 20 \ln a, f_a'(20 \cdot \ln a) = \frac{200 \cdot a \cdot e^{0,05 \cdot 20 \ln a}}{(a + e^{0,05 \cdot 20 \ln a})^2},$
 $f_a'(x_W) = \frac{200 \cdot a}{(a + a)^2}, f_a'(x_W) = \frac{200}{4}, f_a'(x_W) = 50. \text{ Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit findet nach } x_W = 20 \cdot \ln a \text{ Tagen statt, sie beträgt unabhängig von } a \text{ } f_a'(x_W) = 50 \frac{g}{\text{Tag}}.$
 Ortskurve: $f_a(x_W) = \frac{4000 \cdot e^{0,05 \cdot 20 \ln a}}{a + e^{0,05 \cdot 20 \ln a}}, f_a(x_W) = \frac{4000 \cdot a}{a + a}, f_a(x_W) = 2000, f_a(x) = 2000.$

f) Das uneigentliche Integral wird berechnet über $A = \int_0^\infty (4000 - f_a(x)) \cdot dx,$

$$A = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \left(4000 - \frac{4000 \cdot e^{0,05 \cdot x}}{a + e^{0,05 \cdot x}}\right) \cdot dx, \quad A = \lim_{b \rightarrow \infty} [4000x - 80000 \ln(a + e^{0,05 \cdot x})]_0^b,$$

$A = \lim_{b \rightarrow \infty} (4000b - 80000 \ln(a + e^{0,05 \cdot b}) + 80000 \ln(a + 1)).$ Im Ausdruck $80000 \ln(a + e^{0,05 \cdot b})$ kann beim Streben von $b \rightarrow \infty$ der Wert von a vernachlässigt werden, so dass $\lim_{b \rightarrow \infty} (4000b - 80000 \ln e^{0,05 \cdot b}), \lim_{b \rightarrow \infty} (4000b - 80000 \cdot 0,05b), \lim_{b \rightarrow \infty} (4000b - 4000b) = 0.$ Der Inhalt der Fläche beträgt $A = 80000 \ln(a + 1).$

5.a) Mit den Listen $L_1 = \{0, 100, 180\}, L_2 = \{0,1, 1,27, 1,94\}$ und GTR: STAT \rightarrow CALC \rightarrow B:Logistic L_1, L_2 erhält man $a = 19, 1, b = 0,035, c = 2, \text{ d.h. } f(x) = \frac{2}{1 + 19,1 \cdot e^{-0,035 \cdot x}}$ mit $G = 2$ als Grenzwert. Eine ausgewachsene Sonnenblume wird 2,0 m groß.

b) $f_k(x) = \frac{2e^{kx}}{e^{kx} + 19}, f_k'(x) = \frac{2ke^{kx} \cdot (e^{kx} + 19) - (ke^{kx} \cdot 2e^{kx})}{e^{2kx} + 361}, f_k'(x) = \frac{2ke^{kx} \cdot (e^{kx} + 19) - (ke^{kx} \cdot 2e^{kx})}{e^{2kx} + 361},$
 $f_k'(x) = \frac{2ke^{kx} \cdot (e^{kx} + 19 - e^{kx})}{(e^{kx} + 19)^2}, f_k'(x) = \frac{38ke^{kx}}{(e^{kx} + 19)^2} \text{ mit } k > 0: \text{ streng monoton steigend}$

$0,2 = \frac{2e^{kx}}{e^{kx} + 19}, 0,2e^{kx} + 3,8 = 2e^{kx}, 1,8e^{kx} = 3,8, x = \frac{\ln \frac{19}{9}}{k}, x = \frac{1}{k} \ln \frac{19}{9}.$ Nach $x = \frac{\ln \frac{19}{9}}{k}$ Tagen ist die Sonnenblume 20 cm groß. k hat Einfluss auf die Wachstumsgeschwindigkeit.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \cdot e^{kx}}{e^{kx} + b}, \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \cdot e^{kx}}{e^{kx}(1 + \frac{b}{e^{kx}})}, \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = a. \text{ Die Grenzhöhe ist } a.$

a, b bestimmen: $a = 1,8, 0,2 = \frac{1,8 \cdot e^{k \cdot 0}}{e^{k \cdot 0} + b}, 0,2 = \frac{1,8}{1 + b}, 1 + b = 9, b = 8.$

d) $g(x)$ stellt die relative (prozentuale) Wachstumsgeschwindigkeit dar.

$$g(x) = \frac{f_k'(x)}{f_k(x)}, g(x) = \frac{\frac{38ke^{kx}}{(e^{kx} + 19)^2}}{\frac{2e^{kx}}{e^{kx} + 19}}, g(x) = \frac{38ke^{kx}}{(e^{kx} + 19) \cdot 2e^{kx}}, g(x) = \frac{19k}{e^{kx} + 19}, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{19k}{e^{kx} + 19}, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Die relative Wachstumsgeschwindigkeit wird immer kleiner, sie strebt gegen Null.

$$\int_0^\infty g(x) \cdot dx = \int_0^\infty \frac{f_k'(x)}{f_k(x)} dx, \int_0^\infty g(x) \cdot dx = [\ln |f_k(x)|]_0^\infty, \int_0^\infty g(x) \cdot dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln |f_k(x)|]_0^b,$$

$$\int_0^\infty g(x) \cdot dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \left| \frac{2e^{kx}}{e^{kx} + 19} \right| \right]_0^b \text{ mit } f(x) > 0, \int_0^\infty g(x) \cdot dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{2e^{kb}}{e^{kb} + 19} - \ln \frac{1}{10} \right),$$

$$\int_0^\infty g(x) \cdot dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{2e^{kb}}{e^{kb}(1 + \frac{19}{e^{kb}})} - \ln \frac{1}{10} \right), \int_0^\infty g(x) \cdot dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{2}{1 + \frac{19}{e^{kb}}} - \ln \frac{1}{10} \right),$$

$$\int_0^\infty g(x) \cdot dx = \ln 2 - \ln \frac{1}{10}, \int_0^\infty g(x) \cdot dx = \ln 2 + \ln 10, \int_0^\infty g(x) \cdot dx = \ln 20.$$

6.a) $f_k(t) = \frac{100}{1+79e^{-k \cdot t}}$, $35 = \frac{100}{1+79e^{-15 \cdot k}}$, $1 + 79e^{-15 \cdot k} = \frac{20}{7}$, $79e^{-15 \cdot k} = \frac{13}{7}$, $k = -\frac{1}{15} \ln \frac{13}{79 \cdot 7}$, $k = 0,25$
 maximaler Bestand: $G = 100$, $\frac{100}{1+79e^{-0,25 \cdot t}} > 99$, $1 + 79e^{-0,25 \cdot t} < \frac{100}{99}$, $79e^{-0,25 \cdot t} < \frac{1}{99}$,
 $x > -4 \ln \frac{1}{79 \cdot 99}$, $t > 35,86$. Ab etwa $t = 35,9$ werden 99 % des maximalen Bestandes überschritten.

$f_k'(t) = \frac{-79 \cdot (-k) \cdot e^{-k \cdot t} \cdot (100)}{(1+79e^{-k \cdot t})^2}$, $f_k'(t) = \frac{7900k \cdot e^{-k \cdot t}}{(1+79e^{-k \cdot t})^2}$. Die Wachstumsgeschwindigkeit entspricht der 1. Ableitung: Sie nimmt bis zum Hochpunkt von $f_k'(t)$ zu ($f_k'(t)$ ist bis zum HP streng monoton wachsend, $f_k'(t) > 0$) und danach wieder ab ($f_k'(t)$ ist nach dem HP streng monoton fallend, $f_k'(t) < 0$). Im Hochpunkt ist sie Null, d.h. maximale Wachstumsgeschwindigkeit im WP von $f(x)$: notw. Bed: $f_k''(t) = 0$:

$$f_k''(t) = \frac{-7900k^2 \cdot e^{-k \cdot t} \cdot (1+79e^{-k \cdot t})^2 - 2(1+79e^{-k \cdot t}) \cdot (-79k \cdot e^{-k \cdot t}) \cdot 7900k \cdot e^{-k \cdot t}}{(1+79e^{-k \cdot t})^4},$$

$$f_k''(t) = \frac{-7900k^2 \cdot e^{-k \cdot t} \cdot (1+79e^{-k \cdot t}) + 158k \cdot e^{-k \cdot t} \cdot 7900k \cdot e^{-k \cdot t}}{(1+79e^{-k \cdot t})^3}, f_k''(t) = \frac{-7900k^2 \cdot e^{-k \cdot t} (1-79 \cdot e^{-k \cdot t})}{(1+79e^{-k \cdot t})^3}, 0 = \frac{-7900k^2 \cdot e^{-k \cdot t} (1-79 \cdot e^{-k \cdot t})}{(1+79e^{-k \cdot t})^3},$$

$$0 = -7900k^2 \cdot e^{-k \cdot t} (1 - 79 \cdot e^{-k \cdot t}), \text{ Satz: } \dots 0 = -7900k^2 \cdot e^{-k \cdot t}, t \text{ n.l., } 0 = 1 - 79 \cdot e^{-k \cdot t},$$

$$t_W = -\frac{1}{k} \ln \frac{1}{79}, t_W = \frac{1}{k} \ln 79.$$

$$f_k(t_W) = \frac{100}{1+79e^{-k \cdot \frac{1}{k} \ln 79}}, f_k(t_W) = \frac{100}{1+79e^{-\ln 79}}, f_k(t_W) = \frac{100}{1+79 \cdot (79)^{-1}}, f_k(t_W) = \frac{100}{1+\frac{79}{79}}, f_k(t_W) = \frac{100}{1+1},$$

$f_k(t_W) = 50$, $W(\frac{1}{k} \ln 79; 50)$. Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt

$$t_W = \frac{1}{k} \ln 79, \text{ sie beträgt } f_k'(t_W) = \frac{7900k \cdot e^{-k \cdot \frac{1}{k} \ln 79}}{(1+79e^{-k \cdot \frac{1}{k} \ln 79})^2}, f_k'(t_W) = \frac{7900k \cdot (e^{\ln 79})^{-1}}{(1+79(e^{\ln 79})^{-1})^2}, f_k'(t_W) = \frac{7900k \cdot \frac{1}{79}}{(1+79 \cdot \frac{1}{79})^2},$$

$$f_k'(t_W) = \frac{100k}{(1+1)^2}, f_k'(t_W) = 25k.$$

b) $f_{0,25}(0) = \frac{100}{1+79e^{-0,25 \cdot 0}}, f_{0,25}(0) = \frac{5}{4}, f_{0,25}(15) = \frac{100}{1+79e^{-0,25 \cdot 15}}, f_{0,25}(15) = \frac{100}{1+79 \cdot e^{-\frac{15}{4}}}, f_{0,25}(15) = 35.$

$$g'(t) = a \cdot g(t), \int a = \int \frac{g'(t)}{g(t)}, a \cdot t + c_1 = \ln|g(t)| + c_2, e^{at+c_1} = e^{\ln|g(t)|+c_2}, e^{at} \cdot e^{c_1} = g(t) \cdot e^{c_2}.$$

Damit ist $g(t) = e^{c_1-c_2} \cdot e^{at}$ mit $c_1 - c_2 = c$. Es gilt: $g(t) = e^c \cdot e^{at}$. I... $\frac{5}{4} = e^c \cdot e^{a \cdot 0}$, $e^c = \frac{5}{4}$, $c = \ln \frac{5}{4}$. II... $35 = e^{\ln \frac{5}{4}} \cdot e^{a \cdot 15}$, $35 = \frac{5}{4} \cdot e^{a \cdot 15}$, $a = \frac{\ln 28}{15}$, $a = 0,222$.

Die Funktion heißt $g(t) = \frac{5}{4} \cdot e^{0,222 \cdot t}$.

Deutung: $f_{0,25}(t) = \frac{100}{1+79e^{-0,25 \cdot t}}, f_{0,25}'(t) = \frac{79 \cdot 100 \cdot 0,25 \cdot e^{-0,25 \cdot t}}{(1+79e^{-0,25 \cdot t})^2}, f_{0,25}'(x) = \frac{79 \cdot 0,25 \cdot e^{-0,25 \cdot t}}{(1+79e^{-0,25 \cdot t})} \cdot f(t),$

$$f_{0,25}'(x) = \frac{79 \cdot 0,25 \cdot e^{-0,25 \cdot t}}{(1+79e^{-0,25 \cdot t})} \cdot f(t) \cdot \frac{100}{100}, f_{0,25}'(t) = 79 \cdot 0,25 \cdot e^{-0,25 \cdot t} \cdot f_{0,25}(t) \cdot \frac{f_{0,25}(t)}{100},$$

$$f_{0,25}'(t) = \frac{1}{100} \cdot 0,25 \cdot f_{0,25}(t) \cdot 79 \cdot e^{-0,25 \cdot t} \cdot f_{0,25}(t),$$

$$f_{0,25}'(t) = \frac{1}{100} \cdot 0,25 \cdot f_{0,25}(t) \cdot \left(\frac{100}{f_{0,25}(t)} - 1\right) \cdot f_{0,25}(t),$$

$$f_{0,25}'(t) = \frac{1}{100} \cdot 0,25 \cdot f_{0,25}(t) \cdot \left(\frac{100}{f_{0,25}(t)} - \frac{f_{0,25}(t)}{f_{0,25}(t)}\right) \cdot f_{0,25}(t),$$

$$f_{0,25}'(t) = \frac{1}{100} \cdot 0,25 \cdot f_{0,25}(t) \cdot \left(\frac{100 - f_{0,25}(t)}{f_{0,25}(t)}\right) \cdot f_{0,25}(t),$$

$$f_{0,25}'(t) = \frac{1}{100} \cdot 0,25 \cdot f_{0,25}(t) \cdot (100 - f_{0,25}(t)).$$

$f_{0,25}'(t)$ ist proportional zum Bestand und zur Differenz zwischen 100 und dem Bestand. Es handelt sich um ein logistisches Wachstum. Der Anfangsbestand nimmt zunächst langsam zu, allerdings beschleunigt sich das Wachstum bis zu einem Maximalwert. Anschließend steigt der Graph weiter an, allerdings verlangsamt sich das Wachstum und die Kurve geht asymptotisch gegen 100.

7.a) $f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = 0$; $f'(t) = \frac{e^t \cdot (1+e^t)^2 - 2(1+e^t) \cdot e^t \cdot e^t}{(1+e^t)^4}$, $f'(t) = \frac{e^t \cdot (1+e^t) - 2 \cdot e^{2t}}{(1+e^t)^3}$,
 $f'(t) = \frac{e^t(1+e^t-2e^t)}{(1+e^t)^3}$, $f'(t) = \frac{e^t(1-e^t)}{(1+e^t)^3}$ → für $t > 0$ wird der Zähler negativ, der Nenner ist positiv, der Bruch ist somit negativ → streng monoton fallend. Der Fischbestand nimmt nicht ab, er nimmt zu. $f(t)$ gibt die Änderungsrate an, also die Momentangeschwindigkeit. Die Geschwindigkeit nimmt im Laufe der Zeit ab, was bedeutet, dass der Bestand im Laufe der Zeit immer langsamer wächst, aber trotzdem noch ansteigt.

Logistisches Wachstum

7.b) $F(t) = \frac{-1}{e^t+1}$, Nachweis: $F'(t) = \frac{0-e^t \cdot (-1)}{(e^t+1)^2}$, $F'(t) = \frac{e^t}{(e^t+1)^2} = f(t)$

Die Bestandsfunktion in Mio. Fischen wird durch die Stammfunktion $F(t)$ dargestellt. Hierbei muss berücksichtigt werden, dass der Anfangsbestand 4 Millionen Fische sind,

also $F(0) = 4$. $F(t) = \frac{-1}{e^t+1} + c$, $F(0) = \frac{-1}{e^0+1} + c$, $4 = \frac{-1}{1+1} + c$, $c = 4,5$, $F(t) = \frac{-1}{e^t+1} + 4,5$,

$F(2) = \frac{-1}{e^2+1} + 4,5$, $F(2) = 4,381$. Der Bestand nach 2 Jahren beträgt 4,38 Mill. Fische.

$\lim_{x \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{1+e^t} + 4,5 = 4,5$. Es befinden sich langfristig 4,5 Millionen Fische im See.

c) $G = 7000$, $f'(t) = k \cdot (G - f(t))$, beschränktes Wachstum: $f(t) = G - (G - a) \cdot e^{-kt}$, mit $a = 4000$, $f(t) = 7000 - 3000 \cdot e^{-kt}$, $f(1) = 4400$, $4400 = 7000 - 3000 \cdot e^{-k \cdot 1}$, $-2600 = -3000 \cdot e^{-k \cdot 1}$, $k = -\ln \frac{13}{15}$, $k = 0,1431$, $f(t) = 7000 - 3000 \cdot e^{-0,1431 \cdot t}$

Die Differentialgleichung lautet $f'(t) = 0,1431 \cdot (7000 - f(t))$.

d) Vorhandensein von 5000 Fischen: $5000 = 7000 - 3000 \cdot e^{-0,1431 \cdot t}$, $t = \frac{\ln \frac{2}{3}}{-0,1431}$, $t = 2,83$

Nach 2,83 Monaten sind 5000 Fische im Teich.

Die Funktionsgleichung ist $f(t) = 7000 - (7000 - a) \cdot e^{-0,1431 \cdot t}$, $5000 = 7000 - (7000 - a) \cdot e^{-0,1431 \cdot 5}$, $2000 = (7000 - a) \cdot e^{-0,1431 \cdot 5}$, $a = 7000 - \frac{2000}{e^{-0,7155}}$, $a = 2910$. Der neue Anfangsbestand wäre also 2910 Fische.

1. Bei einem Wachstumsprozess kann der momentane Bestand durch die Funktion f mit $f(t) = 8 - 3 \cdot e^{-0,02 \cdot t}$, (t in min) beschrieben werden.
 - a) Berechnen Sie den Anfangsbestand und den Bestand nach 2 Stunden?
 - b) Durch welche Schranke S ist das Wachstum begrenzt? Wie lange dauert es, bis der Bestand 90% von S erreicht hat.
 - c) Welche Differenzialgleichung erfüllt dieser Wachstumsprozess?
 - d) Nach welcher Zeit beträgt der Zuwachs pro Minute weniger als 1%?

2. In einer Stadt gibt es 40.000 Haushalte, von denen nach einer Meinungsumfrage etwa jeder fünfte für den Kauf eines neu auf den Markt gebrachten Haushaltsartikels in Frage kommt. Es ist damit zu rechnen, dass der Absatz des Artikels im Laufe der Zeit zunehmend schwieriger wird, da der Kreis der möglichen Käufer und deren Kauflust abnimmt. In den ersten drei Monaten werden 1700 Stück des Artikels verkauft. Kann der Hersteller davon ausgehen, dass innerhalb des ersten Jahres mindestens 5500 Stück verkauft werden?

3. Beim Lösen von Kochsalz (NaCl) in destilliertem Wasser beschreibt die Funktion m (in g) die zur Zeit t bereits gelöste Menge an Kochsalz. Die gelöste Salzmenge kann einen bestimmten Wert m_0 , die Sättigungsgrenze, nicht überschreiten. Beobachtungen haben gezeigt, dass die Geschwindigkeit, mit der sich $m(t)$ ändert, näherungsweise proportional zur Menge des noch löslichen Salzes ist.
 - a) Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung auf, wenn die Sättigungsgrenze bei 100 g destilliertem Wasser 36 g Kochsalz beträgt.
 - b) Bestimmen Sie den Funktionsterm $m(t)$, wenn bei $t=0$ noch kein Kochsalz in 100 g destilliertem Wasser gelöst war, nach 30 Minuten aber 28g.

4. Auf einen Fallschirmspringer der Gesamtmasse m (in kg), der sofort nach dem Absprung seinen Fallschirm öffnet, wirken Kräfte einerseits die Gewichtskraft $F_G = mg$ nach unten, andererseits der Luftwiderstand $F_L = c \cdot v(t)$, der der Bewegung entgegengesetzt gerichtet und annähernd proportional zur momentanen Fallgeschwindigkeit v (in $\frac{m}{s}$) ist. Mithilfe der Grundgleichung der Mechanik ergibt sich: $m \cdot a = m \cdot g - c \cdot v(t)$. (Hinweis: $a(t) = v'(t)$)
 - a) Zeigen Sie, dass die momentane Geschwindigkeit v die Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums erfüllt, und geben Sie eine Lösung für v an, wenn $v(0) = 0$ ist.
 - b) Geben Sie die maximale Geschwindigkeit v_{\max} an. Es sei $v_{\max} = 5 \frac{m}{s}$ und $m = 95 \text{ kg}$. Bestimmen Sie hiermit die Konstante c .
 - c) Wann hat der Fallschirmspringer die halbe Endgeschwindigkeit erreicht?

5. Einem Patienten wird über eine Tropfinfusion ein Medikament verabreicht, das zuvor nicht im Körper vorhanden war. Pro Minute gelangt dabei eine Menge von 4 mg ins Blut. Andererseits beginnt die Niere das im Blut angereicherte Medikament wieder auszuschcheiden; die momentane Ausscheidungsrate beträgt dabei 5% pro Minute der jeweils im Blut aktuell vorhandenen Menge des Medikamentes $m(t)$.
 - a) Welche Differentialgleichung modelliert die zeitliche Entwicklung der Menge $m(t)$?
 - b) Geben Sie die Funktion an, die diese Differentialgleichung löst. Zeigen Sie, dass diese Tropfinfusion auf lange Sicht zu einer konstanten Menge des Medikamentes im Blut führt. Geben Sie diesen maximalen Wert an. Wann ist dieser zu 90% erreicht?